数学基础思维

Zircon

Contents

Part I

式子处理

Chapter 1

换元法

换元法的黄金律

正如研究函数，要先研究函数的定义域——引入新元，必不可少的一步是研究新元的取值范围。
换元的好处在于把复杂的式子换成熟悉的形式（如二次函数、反比例函数），但**值域由新元的取值区间决定**——忘记这一步几乎是所有换元题失分的罪魁。

例（双元换元：正余弦之和与积）.

> 设 $f(\theta) = \sin\theta + \cos\theta + \sin\theta\cos\theta$，$\theta \in \mathbb{R}$。求 $f(\theta)$ 的值域。

解.

观察结构：式中有 $\sin\theta + \cos\theta$ 与 $\sin\theta\cos\theta$ 两块。由平方关系

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta,$$

这两块之间存在天然联系——因此**用同一个 t 就能表达两者**。

换元：令 $t = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\big(\theta + \frac{\pi}{4}\big) \in [-\sqrt{2},\ \sqrt{2}]$。则

$$\sin\theta\cos\theta = \frac{t^2 - 1}{2},$$

从而

$$f(\theta) = t + \frac{t^2 - 1}{2} = \frac{1}{2}(t+1)^2 - 1, \qquad t \in [-\sqrt{2},\ \sqrt{2}].$$

二次函数分析：开口向上，对称轴 $t = -1 \in [-\sqrt{2},\ \sqrt{2}]$。

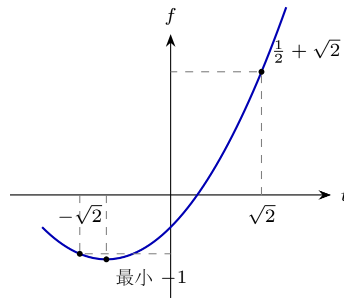
- 最小值 $f_{\min} = -1$，在 $t = -1$ 处取得；
- 最大值 $f_{\max}$ 在区间端点处取。比较 $t = -\sqrt{2}$ 与 $t = \sqrt{2}$：

$$t = \sqrt{2} : \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^2 - 1 = \tfrac{1}{2}(3 + 2\sqrt{2}) - 1 = \tfrac{1}{2} + \sqrt{2},$$

$$t = -\sqrt{2} : \tfrac{1}{2}(-\sqrt{2}+1)^2 - 1 = \tfrac{1}{2}(3 - 2\sqrt{2}) - 1 = \tfrac{1}{2} - \sqrt{2} < \tfrac{1}{2} + \sqrt{2}.$$

故 $f_{\max}=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$。

值域： $f(\theta)\in\left[-1,\ \frac{1}{2}+\sqrt{2}\right]$。



注.

换元的诊断问句：换元之前先问自己两个问题——

1. **形式上能换吗?** 原式中的”复杂块”能否用一个新变量统一表达？（本题：两块有 $t^2=1+2u$ 的联系，所以只需一个 t。）

2. **新元的范围是多少?** 原变量的约束（如 $\theta\in\mathbb{R}$）要翻译成新元的约束。跳过这一步会造成”值域算大”。

Chapter 2

拆项法

数列求和题里 80% 的关键是**裂项**——把一个" 难以直接求和" 的项拆成两个相邻项的差，累加时中间部分消去，只剩首尾两项。按通项结构可分三类：等差型、等比型、等差 + 等比型。此外还有" 和项"（每项自带正负号相间）需要**两两配对再求和**。

2.1 裂项：等差型

等差型裂项的基本模板

若 $a_n = \dfrac{1}{(k_{n+1})(k_n)}$，其中 $k_n = k_1 + (n-1)d$ 为等差数列，则

$$a_n = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{k_n} - \frac{1}{k_{n+1}}\right).$$

这个 $\frac{1}{d}$ 因子容易漏!

例（等差型裂项）.

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \dfrac{1}{(2n+1)(2n-1)}$。求前 n 项和 T_n。

解.

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{\frac{1}{2}\big[(2n+1)-(2n-1)\big]}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

累加:

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}. \end{aligned}$$

2.2 裂项：等比型

等比型裂项的基本模板

若分子含 q^n、分母含两项等比差，常可用恒等式

$$q^n = \frac{q^{n+1} - q^n}{q - 1}$$

把分子”拆”到分母里去，裂为相邻两项之差。

例（等比型裂项 + 主元法）.

数列 $\{b_n\}$ 通项 $b_n = \dfrac{2^n}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)}$，前 n 项和为 S_n。若 $\forall n \in \mathbb{N}^+$，$a \in [-1,1]$，均有 $x^2 - ax - 2S_n \geq 0$ 成立，求 x 的取值范围。

解.

第一步：裂 b_n。利用 $2^n = (2^{n+1}-1) - (2^n - 1)$：

$$b_n = \frac{(2^{n+1}-1) - (2^n-1)}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)} = \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1}.$$

于是

$$S_n = \frac{1}{2^1-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}-1}.$$

第二步：$n \to \infty$ 的极限思想。由 $S_n < 1$ 且 $S_n \to 1$，所以 $\forall n$，$2S_n < 2$ 且 $2S_n \to 2$。要使 $x^2 - ax - 2S_n \geq 0$ 对所有 n 都成立，**最严格的约束是** $n \to \infty$，即

$$x^2 - ax - 2 \geq 0 \quad 对所有a \in [-1,1] \ 恒成立.$$

第三步：主元法——把 a 当主元，x 当参数。式子

$$g(a) := -x \cdot a + (x^2 - 2)$$

是 a 的一次函数。要在 $[-1,1]$ 上恒 ≥ 0，只需两端点 ≥ 0：

$$\begin{cases} g(-1) = x + x^2 - 2 \geq 0 \iff (x+2)(x-1) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty), \\ g(1) = -x + x^2 - 2 \geq 0 \iff (x-2)(x+1) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty). \end{cases}$$

取交集：

$$x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty).$$

2.3 裂项：等差 + 等比型

等差 + 等比型裂项的原则

对于 $\{a_n\}$ 形如 $a_n = \dfrac{(\text{等差})_n \cdot q^n}{(\text{等差})_n \cdot (\text{等差})_{n+1}}$ 这种”等差与等比混合”的通项，裂项后的形式应是

$$a_n = c_{n+1} - c_n, \qquad c_n = \frac{q^n}{\text{某等差}}.$$

裂项后 $\{c_n\}$ 的**分子应仅差** q^n（因为 q^n 的比是 q，天然适合两相邻项之差），而**除** q^n **外只有与** n **无关的因子**。

例（等差 + 等比型）.

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \dfrac{(2n-3)\cdot 2^n}{4n^2-1}$。若 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，求 S_n。

解.

分母凑分子： $4n^2 - 1 = (2n+1)(2n-1)$。关键恒等式

$$2n - 3 = 2(2n-1) - (2n+1).$$

代入：

$$a_n = \frac{\big[2(2n-1) - (2n+1)\big]\cdot 2^n}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{2^{n+1}}{2n+1} - \frac{2^n}{2n-1}.$$

设 $c_n = \dfrac{2^n}{2n-1}$，则 $c_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{2n+1}$，且 $a_n = c_{n+1} - c_n$。故

$$S_n = c_{n+1} - c_1 = \frac{2^{n+1}}{2n+1} - 2.$$

2.4 和项：正负号相间

两两配对

若通项含 $(-1)^n$，直接累加会忽上忽下，难以看出规律。**诀窍是把奇、偶两项配对求和**，让振荡”局部相消”。分类讨论 n 的奇偶即可。

例（带 $(-1)^n$ 的和项）.

数列 $\{c_n\}$ 通项 $c_n = (-1)^n \dfrac{4n}{(2n+1)(2n-1)}$，$\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n。求 T_n。

解.

先裂项：由 $4n = (2n+1) + (2n-1)$，

$$c_n = (-1)^n\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right).$$

奇偶配对：计算 $c_n + c_{n+1}$（其中 n 为奇数，$n+1$ 为偶数）：

$$c_n + c_{n+1} = -\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3}\right) = -\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+3}.$$

这是个漂亮的" 跨两步" 裂项结构。

情形一：n **为奇数**（$n = 2k-1$）。前 n 项配成 $\frac{n-1}{2}$ 对加一个剩余项 c_n：

$$T_n = \underbrace{(c_1 + c_2) + (c_3 + c_4) + \cdots + (c_{n-2} + c_{n-1})}_{\text{每对都是裂项差}} + c_n.$$

对子求和（裂项累加）：

$$\sum_{\text{pairs}} = \left(-\frac{1}{1} + \frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{9}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{2n-5} + \frac{1}{2n-1}\right) = -1 + \frac{1}{2n-1}.$$

加上 $c_n = -\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}$（因 n 为奇数，$(-1)^n = -1$）：

$$T_n = -1 + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = -1 - \frac{1}{2n+1} = -\frac{2n+2}{2n+1}.$$

情形二：n **为偶数**。全部配对：

$$T_n = (c_1 + c_2) + \cdots + (c_{n-1} + c_n) = -1 + \frac{1}{2n+1} = -\frac{2n}{2n+1}.$$

综合：

$$T_n = \begin{cases} -\dfrac{2n+2}{2n+1}, & n \text{ 为奇数}, \\ -\dfrac{2n}{2n+1}, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

注.

本章四类裂项背后是**同一个朴素想法**：" 让累加后中间消，只留首尾"。具体形式因 a_n 的" 骨架" 而异，但识别它们只需做一件事——**看分母/分子的因子能不能用相邻两项的差表达**。这也是为什么**等差 + 等比型**要先" 分母凑分子"：让分子变成两个相邻 $(2n \pm 1)$ 的线性组合。

Chapter 3

消次处理

”消次”指的是把高次式或混合次式**经过重新组合 + 换元，降为熟悉的低次结构**——最常见的是二次函数或基本不等式的标准形式。本章两个典型武器：$\left(x \pm \frac{1}{x}\right)$ 相关的恒等式、基本不等式的”升次—配凑”。

3.1 $\left(x \pm \frac{1}{x}\right)$ 及其衍生式

”$x \pm \frac{1}{x}$ 升平方 $= x^2 + \frac{1}{x^2} \pm 2$”

$$\left(x + \tfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \tfrac{1}{x^2} + 2, \qquad \left(x - \tfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \tfrac{1}{x^2} - 2.$$

因此，**若式中同时出现 $x^2 + \frac{1}{x^2}$、$x + \frac{1}{x}$（或 $x - \frac{1}{x}$）这两类结构**，就可以把它们用同一个新元 t 统一起来。常数的配凑即可使式子变为关于 t 的完全平方或二次函数，实现**形式的统一**。

例（点到反比例曲线的距离）.

在平面直角坐标系 xOy 中，点 (a, a) 到曲线 $y = \dfrac{1}{x}$ 上的点的距离最小值为 $\sqrt{10}$，其中 $a > 0$。求 a 的值。

解.

设曲线上一点 $\left(x, \frac{1}{x}\right)$（$x > 0$，因为 (a, a) 在第一象限，最近点必在 $x > 0$ 分支上）。距离平方

$$d^2 = (x-a)^2 + \left(\tfrac{1}{x} - a\right)^2 = x^2 + \tfrac{1}{x^2} + 2a^2 - 2ax - \tfrac{2a}{x}.$$

关键的消次：把 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 与 $x + \frac{1}{x}$ 放到一起看：

$$d^2 = \underbrace{\left(x^2 + \tfrac{1}{x^2} + 2\right)}_{=(x+1/x)^2} - 2 - 2a\left(x + \tfrac{1}{x}\right) + 2a^2 = \left(x + \tfrac{1}{x}\right)^2 - 2a\left(x + \tfrac{1}{x}\right) + 2a^2 - 2.$$

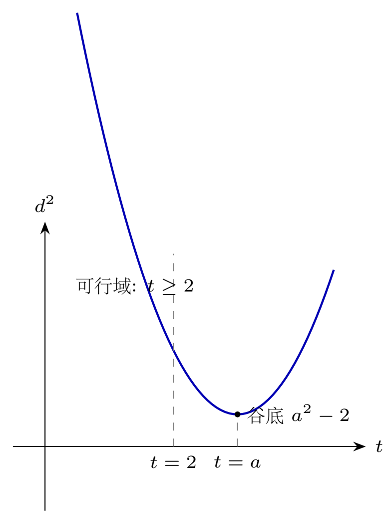
换元：令 $t = x + \frac{1}{x}$。由均值不等式，$x > 0$ 时 $t \geq 2$。则

$$d^2 = t^2 - 2at + 2a^2 - 2 = (t-a)^2 + a^2 - 2, \qquad t \geq 2.$$

二次函数分析：开口向上，对称轴 $t = a$。

- **情形 I**：$a \geq 2$。对称轴落在可行域内，d^2 在 $t = a$ 取最小值 $a^2 - 2$。令 $a^2 - 2 = 10$，得 $a = 2\sqrt{3}$（满足 $a \geq 2$）。✓
- **情形 II**：$0 < a < 2$。对称轴在可行域左侧，d^2 在 $t = 2$ 取最小值 $(2-a)^2 + a^2 - 2 = 2a^2 - 4a + 2$。令 $2a^2 - 4a + 2 = 10 \Rightarrow a^2 - 2a - 4 = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{5}$。但 $a > 0$ 且 $a < 2$：$1 - \sqrt{5} < 0$（舍），$1 + \sqrt{5} \approx 3.24 > 2$（不满足 $a < 2$，舍）。

综上，$a = 2\sqrt{3}$。



3.2 基本不等式

基本不等式的”一正、二定、三相等”

基本不等式 $x + y \geq 2\sqrt{xy}$（$x, y > 0$）的三大使用条件：

1. **一正**：x, y 都要是正数；
2. **二定**：乘积 xy 要是常数（**0 次**），否则和 $x + y$ 的下界会随变量漂移；
3. **三相等**：取等条件 $x = y$ 要能在定义域内达成。

”二定”这一步常被忽略——它要求**求和项乘起来的次数为 0**。因此若乘积里仍含变量，需要借助已知条件**配凑升次 / 降次**，让总次数归零。

例（条件下的升次配凑）.

已知 $a + 2b = 1$，求 $\dfrac{a^2 + 4b}{ab}$ 的最小值（$a > 0$，$b > 0$）。

解.

先化简：

$$\frac{a^2+4b}{ab}=\frac{a}{b}+\frac{4}{a}.$$

两项乘起来 $\frac{a}{b}\cdot\frac{4}{a}=\frac{4}{b}$ 含变量 b，**不是常数**——直接用基本不等式失败。

升次： 利用条件 $a+2b=1$ 把 $\frac{4}{a}$ 升一次：

$$\frac{4}{a}=\frac{4\cdot 1}{a}=\frac{4(a+2b)}{a}=4+\frac{8b}{a}.$$

则

$$\frac{a^2+4b}{ab}=\frac{a}{b}+4+\frac{8b}{a}\geq 4+2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{8b}{a}}=4+2\sqrt{8}=4+4\sqrt{2}.$$

取等： $\frac{a}{b}=\frac{8b}{a}\iff a^2=8b^2$，结合 $a+2b=1$ 可解出满足 $a,b>0$ 的解，故等号可达。最小值为 $4+4\sqrt{2}$。

注.

形如 $x+\frac{a}{x}$ 的式子使用基本不等式的注意事项：

1. **看 a 的正负**：若 $a>0$，则 $\frac{a}{x}$ 与 x 同号即可用；若 $a<0$，要先提出符号——会”翻带”成反向不等式。

2. **看 x 的取值**：$a>0$ 时，当且仅当 $x=\pm\sqrt{a}$ 时有最值（极值），**但 x 不一定可以取到 $\pm\sqrt{a}$**——如 $x\in[\sqrt{a}+1,+\infty)$ 或 $x\in\mathbb{N}^+$，此时需**用单调性或离散比较**确定最值。

Chapter 4

齐次化处理

”齐次化”是指把式子的**各项次数调整到一致**，从而能够进行统一的代换或约分。常见场景有两类：三角函数”弦化切”（用 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 把常数”升次”到二次齐次）、以及几何中**椭圆 / 双曲线斜率乘积为定值**（通过齐次化把直线方程代入二次曲线）。另外条件 $p=$ 常数（如 $2a+b=4$）可以**把”1”构造出来**——这就是所谓的”1 法”。

4.1 三角：弦化切（齐次化）

把三角式统一成关于 $\tan\theta$ 的有理式

若已知 $\tan\theta=k$，欲求某三角式值，关键思路是**把分子分母化成同次（齐次）**：每一项凑成 $\sin^a\theta\cos^b\theta$ 且 $a+b=$ 某定次数 n。此时分子分母同除 $\cos^n\theta$，所有 $\sin\theta$ 变 $\tan\theta$，$\cos\theta$ 变 1，式子变为关于 $\tan\theta$ 的有理函数。
若式中有常数（0 次项），用 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 把它”升次”到需要的阶。

例（弦化切）.

已知 $\tan\theta=-2$，求 $\dfrac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}$ 的值。

解.

展开 $\sin 2\theta$：

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta,\qquad 1+\sin 2\theta=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^2.$$

代入化简：

$$\frac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\sin\theta\cdot(\sin\theta+\cos\theta)^2}{\sin\theta+\cos\theta}=\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)=\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta.$$

齐次化：此时式子已是关于 $\sin\theta,\cos\theta$ 的 2 次齐次式。分子分母同除 $\cos^2\theta$（注：原

式等于 $\dfrac{\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta}{1}$，把分母的 1 当作 $\sin^2\theta+\cos^2\theta$)：

$$\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta=\frac{\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\tan^2\theta+\tan\theta}{\tan^2\theta+1}.$$

代入 $\tan\theta=-2$：

$$=\frac{4+(-2)}{4+1}=\frac{2}{5}.$$

注.

" 弦化切" 的诀窍是**把所有项凑成相同次数**。如果原式有 $\sin\theta\cos\theta$（2 次）与 $\sin\theta$（1 次）混合，就必须先用 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 把 1 次项升到 2 次——否则分子分母次数不同，除 $\cos^n\theta$ 无法统一。

4.2 "1 法"：把条件当成 1

"1 法" 的核心

若条件形如 $p=$ 常数c（例如 $2a+b=4$），要求某个分式的最值，**可以把 $\frac{c}{c}=1$ 当作乘因子塞进原式**——把条件" 升次" 拿进原式，使每一项都乘以 $\frac{p}{c}$。这样原式变成**齐次分式**，每项的次数平衡，再用基本不等式。

例（"1 法"）.

已知 $a>0$，$b>0$ 且 $2a+b=4$，求 $\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值。

解.

"1" 的构造：由 $2a+b=4$ 得 $\dfrac{2a+b}{4}=1$。则

$$\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot 1=\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{2a+b}{4}.$$

展开：

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{8a}{a}+\frac{4b}{a}+\frac{2a}{b}+\frac{b}{b}\right)=\frac{1}{4}\left(8+1+\frac{4b}{a}+\frac{2a}{b}\right)=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{4b}{a}+\frac{2a}{b}\right).$$

基本不等式：

$$\frac{4b}{a}+\frac{2a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}.$$

故

$$\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{9}{4}+\frac{1}{4}\cdot 4\sqrt{2}=\frac{9}{4}+\sqrt{2}=\frac{9+4\sqrt{2}}{4}.$$

取等：$\frac{4b}{a} = \frac{2a}{b} \iff a^2 = 2b^2 \iff a = \sqrt{2}b$。结合 $2a + b = 4$ 得 $b = \frac{4}{2\sqrt{2}+1}$ (>0)，故等号可达。最小值为 $\frac{9+4\sqrt{2}}{4}$。

注.

"1 法" 的本质是**齐次化**：原式 $\frac{4}{a} + \frac{1}{b}$ 是 -1 次的（每项分母一次），条件 $2a + b$ 是 $+1$ 次的，乘起来是 0 次——而基本不等式要求的" 两项乘积为常数" 正是 0 次条件。这与上一章" 二定" 的要求完全一致。

4.3 椭圆 / 双曲线中的齐次化

证明定直线 / 定斜率的齐次化套路

设圆锥曲线上一定点 P，过 P 的两条直线 PM、PN 分别交曲线于 M、N，已知 $k_{PM} + k_{PN} = 0$ 或 $k_{PM} \cdot k_{PN} = k_0$ 等**关于斜率的对称条件**。要证直线 MN 有某定性质（如斜率为定值、过定点），常用**齐次化**：

1. 把原点平移到 P（即代换 $x \to x + x_P$，$y \to y + y_P$），使 P 成为新原点。
2. 设直线 $MN : mx + ny = 1$（这是绕原点的一般线，m, n 为参数；若 MN 不过原点，这一形式可行）。
3. 把"1" 代入曲线方程，把曲线中的**低次项都乘** $(mx + ny)$ **升次**——使得方程变为齐次二次方程 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$。
4. 两边同除 x^2，变为关于 $\frac{y}{x}$（即斜率）的**二次方程**，$\frac{y}{x}$ 的两根正是 k_{PM}、k_{PN}。由韦达，两根和/积可用 m, n 表达。

例（椭圆的斜率对称条件）.

已知椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$，$P(2, 1)$ 是椭圆上一点。过 P 的两条直线 PM、PN 分别交椭圆于 M、N，且斜率满足 $k_{PM} + k_{PN} = 0$。证明：直线 MN 的斜率为定值，并求之。

解.

第 1 步：平移。令 $x' = x-2, y' = y-1$(使 P 为新原点)。椭圆方程 $\frac{(x'+2)^2}{8} + \frac{(y'+1)^2}{2} = 1$ 展开：

$$\frac{x'^2 + 4x' + 4}{8} + \frac{y'^2 + 2y' + 1}{2} = 1,$$

化简得

$$x'^2 + 4y'^2 + 4x' + 8y' = 0.$$

（利用 P 在椭圆上，常数项抵消。）

第 2 步：设直线 $MN : mx' + ny' = 1$（假设 MN 不过 P，否则 $M = N = P$ 不成

立）。关键一步——**把 1 次项** $4x'+8y'$ **升次为 2 次**，方法是乘以 $(mx'+ny')$：

$$x'^2+4y'^2+(4x'+8y')(mx'+ny')=0.$$

展开：

$$x'^2+4y'^2+4mx'^2+(4n+8m)x'y'+8ny'^2=0,$$

$$(1+4m)x'^2+(4n+8m)x'y'+(4+8n)y'^2=0.$$

第 3 步：除以 x'^2（设 $x'\neq 0$，M、N 均不在 y 轴上）：

$$(4+8n)\left(\frac{y'}{x'}\right)^2+(4n+8m)\left(\frac{y'}{x'}\right)+(1+4m)=0.$$

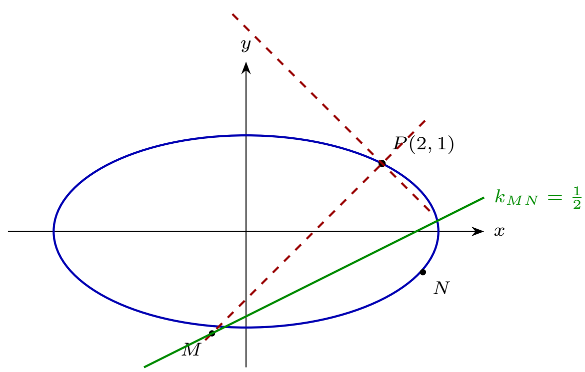
方程的两根即 k_{PM}、k_{PN}（新坐标下斜率）。由韦达定理：

$$k_{PM}+k_{PN}=-\frac{4n+8m}{4+8n}=0 \implies 4n+8m=0 \implies n=-2m.$$

第 4 步：回到 MN **斜率。** $MN: mx'+ny'=1$，即 $y'=\dfrac{1-mx'}{n}=\dfrac{1-mx'}{-2m}$。其斜率（新、旧坐标下相同，因平移不变）：

$$k_{MN}=-\frac{m}{n}=-\frac{m}{-2m}=\frac{1}{2}.$$

故 $k_{MN}=\dfrac{1}{2}$ 为定值。



注.

齐次化的关键观察：椭圆方程 $x'^2+4y'^2+4x'+8y'=0$ 中，x'^2, y'^2 是 2 次齐次，$4x'+8y'$ 是 1 次。直线方程 $mx'+ny'=1$ 正好"乘上去就能把 1 次升为 2 次"，从而整个方程齐次化为关于 x', y' 的 2 次齐次方程，两边除 x'^2 后变为**斜率** $k=\frac{y'}{x'}$ **的二次方程**——这才是整个技巧的精髓。

齐次化的**前提是有定点** P：只有把原点移到定点后，直线 MN 的"常数项"才能被选择性放到分母 1，从而实现齐次化。

Chapter 5

分式处理

分式的处理核心是"**把分子/分母拆成与另一方相关的部分**"——让未知的分式化为"常数 + 简单分式"。常见手段有：分离常数、增减项凑分母、分子裂成分母相关的组合。本章以两个经典场景展开：有理分式估阶、含参分式的不等式证明。

5.1 分离常数

分离常数的动机

对于形如 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 的分式（$\deg P \geq \deg Q$），通过多项式除法把它写成

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}, \qquad \deg r < \deg Q.$$

这样**分子分母的次数差异被显式分离出来**：$R(x)$ 是主阶部分、余项 $\dfrac{r(x)}{Q(x)}$ 是"次要"扰动，便于分析单调性、估算上下界。

例（分离常数估阶）．

已知 $a_n = \dfrac{3n^2 - n - 2}{2n^2 + 2n}$（$n \in \mathbb{N}^+$）。求证：$a_n > n - 1 + \sum_{i=2}^{n} \ln \dfrac{2}{i^2 - 1}$ 对所有 $n \geq 2$ 成立。（提示：利用 $\ln(1 + x) < x$（$x > 0$）。）

解.

第一步：分离常数。对 a_n 作多项式长除：分子 $3n^2 - n - 2 = \dfrac{3}{2}(2n^2 + 2n) - 4n - 2$，故

$$a_n = \frac{3}{2} + \frac{-4n - 2}{2n^2 + 2n} = \frac{3}{2} - \frac{4n + 2}{2n(n + 1)} = \frac{3}{2} - \frac{2n + 1}{n(n + 1)}.$$

进一步**裂项**：$\dfrac{2n+1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}$，故

$$a_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

第二步：化简右端的 $\ln$ 求和。

$$\frac{2}{i^2-1} = \frac{2}{(i-1)(i+1)} = \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i+1} \quad（裂项）.$$

这暗示 $\dfrac{2}{i^2-1}$ 可表示为相邻两项之差；但对数求和里这个裂项不直接消，需要另一思路——**用 $\ln(1+x) < x$ 估计**：

$$\ln\frac{2}{i^2-1} = \ln\left(1 + \frac{2-(i^2-1)}{i^2-1}\right) = \ln\left(1 - \frac{i^2-3}{i^2-1}\right).$$

当 $i \geq 2$ 时 $\dfrac{2}{i^2-1} \leq \dfrac{2}{3} < 1$，即 $\ln\dfrac{2}{i^2-1} < 0$。因此所证 $a_n > n-1+\sum\ln\dfrac{2}{i^2-1}$ 等价于

$$a_n - (n-1) > \sum_{i=2}^{n} \ln\frac{2}{i^2-1}.$$

第三步：左端。由第一步

$$a_n - (n-1) = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - (n-1) = \frac{5}{2} - n - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

第四步：右端用 $\ln x < x-1$（即 $\ln(1+y) < y$，取 $y = x-1$）。

$$\sum_{i=2}^{n} \ln\frac{2}{i^2-1} < \sum_{i=2}^{n}\left(\frac{2}{i^2-1} - 1\right) = \sum_{i=2}^{n} \frac{2}{i^2-1} - (n-1).$$

而 $\sum_{i=2}^{n}\dfrac{2}{i^2-1} = \sum_{i=2}^{n}\left(\dfrac{1}{i-1} - \dfrac{1}{i+1}\right) = 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$（裂项相消）。故

$$\sum_{i=2}^{n} \ln\frac{2}{i^2-1} < \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - (n-1) = \frac{5}{2} - n - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = a_n - (n-1).$$

即 $a_n - (n-1) > \sum_{i=2}^{n} \ln\dfrac{2}{i^2-1}$，移项即得证。■

注.

本例综合了多种技巧：**分式的分离常数 + 裂项 + 对数的放缩估计** ($\ln(1+x) < x$)。分离常数一步把复杂有理式化为"$\dfrac{3}{2}$ + 两个简单裂项分式"，为后续比较估算铺平了道路。没有这一步，式子难以下手。

5.2 增减项配凑

增减同一项使分子向分母靠拢

对于 $\dfrac{f(n)}{g(n)}$，若 $f(n)$ 与 $g(n)$ 结构接近（如相同次数），常用**”加一项、减一项”**的技巧：

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{g(n)+[f(n)-g(n)]}{g(n)} = 1 + \frac{f(n)-g(n)}{g(n)}.$$

特别是在**极限 / 估阶**问题中，这把”两个相近大量之比”变成”1 加一个小量”，更容易分析。

例（配凑出 1）.

设 $n \to \infty$。求 $\dfrac{n^2+3n+1}{n^2+1}$ 的极限。

解.

$$\frac{n^2+3n+1}{n^2+1} = \frac{(n^2+1)+3n}{n^2+1} = 1 + \frac{3n}{n^2+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1+0 = 1.$$

（把 n^2+1 配出来，剩下的 $\dfrac{3n}{n^2+1}$ 分母高一次，$\to 0$。）

注.

分式处理的通用原则：让式子**更”像”已知的结构**。

- **分离常数**——把 $\deg P \geq \deg Q$ 的分式拆成整式 + 真分式；
- **增减项配凑**——让分子出现 $g(n)$，得到 $1 + \dfrac{\text{余项}}{g(n)}$；
- **裂项**——把分式拆成两个更简单分式之差（本章例 11）。

这三招的共同精神：**把未知的分式改写为”常数 + 简单分式”的形式，方便分析。**

Chapter 6

数形结合法

许多代数式或不等式，直接按代数方式处理繁琐。但若识别出它的**几何意义**——如斜率、距离、角度、向量夹角等——就能在坐标系里”一眼看出”最值/范围。本章按常见几何解释分类整理。

6.1 识别”斜率”结构

$\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$ 型：斜率解释

形如 $\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$ 的式子（x_0, y_0 给定常数，(x, y) 在某曲线/区域上变动）可解释为**点 (x, y) 与定点 (x_0, y_0) 连线的斜率**。其取值范围 = 从定点出发、与目标曲线 / 区域相切或相交的直线斜率范围。

例（斜率法求取值范围）.

设点 (x, y) 满足 $(x-2)^2+y^2=1$（以 $(2, 0)$ 为圆心、半径 1 的圆），求 $\dfrac{y}{x}$ 的取值范围。

解.

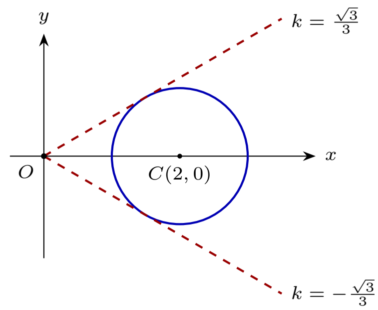
识别几何意义：$\dfrac{y}{x}=\dfrac{y-0}{x-0}$ 是点 (x, y) 与原点 O 连线的**斜率**。

作图：过 O 作圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 的切线。

- 圆心 $C(2, 0)$，半径 1。$|OC|=2$，切线斜率为 $\pm\tan\alpha$，其中 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，故 $\alpha=30°$，$\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$。
- 两条切线斜率 $k=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

范围：两切线之间的"夹角扇区"内的斜率值都可达。即

$$\frac{y}{x} \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right].$$



6.2 识别"两点距离"结构

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$：距离解释

表达式 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 是点 (x,y) 到定点 (a,b) 的**欧氏距离**。若两点其一在曲线上动、另一定点已知，最值等价于"动点到定点的最近 / 最远距离"——**连接圆心 / 用对称 / 用距离公式**即可。

例（距离法）.

点 (x,y) 在直线 $x+y=4$ 上。求 $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$ 的最小值。

解.

识别：$\sqrt{x^2+y^2}=$ 点 $P(x,y)$ 到 $O(0,0)$ 的距离；$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=$ 点 P 到 $A(3,1)$ 的距离。式子即 $|PO|+|PA|$，P 在直线 $x+y=4$ 上。

反射法：求"$|PO|+|PA|$ 之和的最小值"，当 O, A 在直线 $x+y=4$ 的**同侧**时，关于该直线反射 O（或 A）得 O'，则 $|PO|+|PA|=|PO'|+|PA|\geq|O'A|$，等号当 P 在线段 $O'A$ 上时取。

检查同侧：代入 $O(0,0)$：$0+0-4=-4<0$；代入 $A(3,1)$：$3+1-4=0$——A 在直线上！则 $|PA|$ 最小 $=0$ 当 $P=A$，此时 $|PO|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$。故最小值为 $\sqrt{10}$。

（若 A 不在线上而在同侧，则需反射之。）

6.3 识别”点到直线距离”结构

$\dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$：点到直线距离

若式子可化为 $\dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 形式，即点 (x,y) 到直线 $ax+by+c=0$ 的**距离**。常见于分子是绝对值、分母是固定正数根式的结构。

例（点线距）.

已知 x,y 满足 $x^2+y^2\le 1$，求 $\dfrac{|x+y-2|}{\sqrt{2}}$ 的最大值。

解.

几何意义：$\dfrac{|x+y-2|}{\sqrt{2}}=$ 点 (x,y) 到直线 $x+y-2=0$ 的距离。(x,y) 限制在单位圆及其内部。

距离最大点 = 单位圆上离直线最远的点。由直线 $x+y=2$ 的法向量 $(1,1)$，单位圆上对应点为 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$（向法向反方向延伸到边界）。

最大距离 = 圆心到直线距离 + 半径

$$=\frac{|0+0-2|}{\sqrt{2}}+1=\sqrt{2}+1.$$

6.4 识别”向量夹角”结构

$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$：余弦定理

若式子化为 $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$（两向量夹角的余弦），则可借助 $\cos\theta\in[-1,1]$ 限定范围。也可反向用——看到 cos 结构去构造向量。

例（向量法）.

已知 $a,b\in\mathbb{R}$，$a^2+b^2=4$。求 $3a+4b$ 的范围。

解.

构造向量：令 $\vec{u}=(a,b)$，$\vec{v}=(3,4)$。则 $|\vec{u}|=2$，$|\vec{v}|=5$，$\vec{u}\cdot\vec{v}=3a+4b$。由柯西不等式 $(=$ 向量点积公式$)$：

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}|\le|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|=10.$$

> 故 $3a + 4b \in [-10, 10]$。
> （等号取在 $\vec{u}$ 与 $\vec{v}$ 共线时。）

6.5 识别”抛物线焦半径”结构

抛物线的定义式：$|PF| =$ 到准线的距离

抛物线 $y^2 = 2px$（$p > 0$）上点 P 满足

$$|PF| = x_P + \frac{p}{2} \quad （焦点\ F(\tfrac{p}{2}, 0)，准线\ x = -\tfrac{p}{2}）.$$

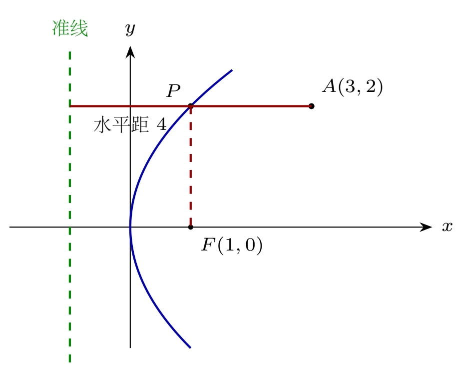
这使得许多”到焦点距离”问题可以转化为”到准线距离”——而准线是直线，容易处理。

例（抛物线焦半径）.

> 设 P 在抛物线 $y^2 = 4x$ 上，$A(3, 2)$ 为定点。求 $|PA| + |PF|$ 的最小值（F 为焦点）。

解.

> $y^2 = 4x$：$2p = 4 \Rightarrow p = 2$，焦点 $F(1, 0)$，准线 $x = -1$。由抛物线定义，$|PF| = x_P + 1$。
> 设 P 到准线距离 $= d(P)$，则 $|PF| = d(P)$。于是
>
> $$|PA| + |PF| = |PA| + d(P).$$
>
> 这是”P 到定点 A 和 P 到准线距离之和”——**当 P, A 在准线同侧**（此处都在 $x > -1$ 一侧），$|PA| + d(P)$ 最小 $= A$ 到准线的距离：
>
> $$d(A) = 3 - (-1) = 4.$$
>
> 等号在 P 为 A 向准线作垂线与抛物线的交点时取到（需验证 A 不在抛物线内）。
> 验 $A(3, 2)$：$y^2 = 4$，$4x = 12$，$4 < 12$ 说明 A 在抛物线右侧（外部）。故 P 可取 A 向准线作水平垂线与抛物线的交点，最小值 $= 4$。



注.

”数形结合”的诊断思路:

1. 看到 $\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$ → 斜率;
2. 看到 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ → 两点距;
3. 看到 $|ax+by+c|$ / 根式 → 点到直线距;
4. 看到 $\dfrac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}$ → 向量夹角余弦;
5. 看到焦点、抛物线 → 焦半径 = 到准线距;椭圆、双曲线定义。

”识别几何量是哪个”是第一步,第二步才是画图 / 作切 / 反射 / 构造。

Part II

数形结合

Chapter 7

关联几何性质

当题目给出的约束本身有几何背景（如椭圆定义、圆周角、三角不等式等），与其一味代数推导，不如**直接调用几何性质**——几何性质本身就是一组经过验证的定理，能一步跨过繁琐代数。

7.1 三角不等式

三角不等式

对任意三点 A, B, C：

$$||AB| - |AC|| \le |BC| \le |AB| + |AC|.$$

$|BC|$ 的最大值 $= |AB| + |AC|$，取等当 A 在 BC 的延长线上（B, A, C 共线，A 在中间或两端）；$|BC|$ 的最小值 $= ||AB| - |AC||$，取等当 A 在线段 BC 上或其延长线上。

例（三角不等式）.

设 P 为定点 $A(1,0)$ 与 $B(-1,0)$ 之外一动点，满足 $|PA| + |PB| = 4$（椭圆定义）。求 $|PA| - |PB|$ 的范围。

解.

由椭圆定义，P 在以 A, B 为焦点、长轴长 4 的椭圆上。$|PA| + |PB| = 4$。

三角不等式：$||PA| - |PB|| \le |AB| = 2$，即 $-2 \le |PA| - |PB| \le 2$。但 P 不在 AB 延长线上（否则 P 在椭圆与 x 轴交点处），即等号可达当 P 为椭圆与 x 轴的左右顶点时。

故 $|PA| - |PB| \in [-2, 2]$（含等号）。

7.2 圆锥曲线定义的转化

椭圆 / 双曲线的第一定义

椭圆：$|PF_1|+|PF_2|=2a$（定值，$2a>|F_1F_2|$）。
双曲线：$||PF_1|-|PF_2||=2a$（定值，$2a<|F_1F_2|$）。
若题目里出现两个距离之和 / 之差，第一反应应是" 它是不是椭圆 / 双曲线的定义? "

例（椭圆定义转化）.

设 F 为抛物线 $y^2=8x$ 的焦点，$A(4,3)$ 为定点。求抛物线上点 P 到 A、F 的距离之和 $|PA|+|PF|$ 的最小值。

解.

$y^2=8x$：$2p=8\Rightarrow p=4$，焦点 $F(2,0)$，准线 $x=-2$。

用抛物线第二定义：$|PF|=x_P+2=P$ 到准线的水平距离 $d(P)$。

$|PA|+|PF|=|PA|+d(P)$。若 A 在抛物线外（即 $y_A^2>8x_A$？代入：$9<32$，不成立，A 在抛物线内），则...

实际检查：$A(4,3)$ 代入抛物线方程 $y^2-8x=9-32=-23<0$，按抛物线 $y^2=8x$ 的几何意义，A 在抛物线内侧（凹侧）。此时 $|PA|+d(P)$ 的最小 **不再**是 A 到准线距离（因为从 A 向准线做垂线与抛物线的交点在 A 的另一侧）。需重新分析。

实际上，若 A 在抛物线内侧（焦点同侧），连接 AF 并延长到准线，最小值 $=|AF|$ $=\sqrt{(4-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$。等号在 P 为 AF 与抛物线的交点时取。

最小值 $=\sqrt{13}$。

7.3 圆周角定理

圆周角定理

同弧所对的**圆周角相等**，都等于**圆心角的一半**。一个重要衍生：

- 若点 P 看定线段 AB 的张角 $\angle APB=\theta$ 为定值，则 P 的轨迹是以 AB 为弦、θ 为圆周角的**圆弧**。
- 张角越大，对应弧的半径越小（直径是最大张角 $90°$ 时的圆）。

例（圆周角定轨迹）.

定线段 AB，$|AB|=4$。动点 P 满足 $\angle APB=60°$。求 $|PA|+|PB|$ 的最大值。

解.

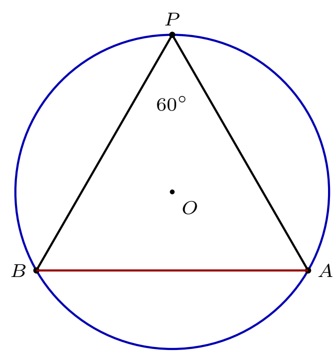
轨迹识别：由圆周角定理，P 的轨迹是弧 $\overset{\frown}{AB}$，以 AB 为弦，圆心角 $= 2\angle APB = 120°$。设圆半径 R，由正弦定理 $\dfrac{|AB|}{\sin 60°} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{4}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$。

$|PA| + |PB|$ **的最大**：当 P 在弧的中点（等腰位置），$|PA| = |PB|$。由余弦定理

$$|AB|^2 = |PA|^2 + |PB|^2 - 2|PA||PB|\cos 60° = 2|PA|^2 - |PA|^2 = |PA|^2.$$

解得 $|PA| = |AB| = 4$。故 $|PA| + |PB| = 8$。

更通用：设 $|PA| = m$，$|PB| = n$。$m^2+n^2-mn = 16$。由 AM-GM：$(m+n)^2 = m^2 + 2mn+n^2 = 16+3mn$。且 $mn \le \left(\dfrac{m+n}{2}\right)^2$（AM-GM），代回：$(m+n)^2 \le 16+\dfrac{3(m+n)^2}{4}$，$\dfrac{(m+n)^2}{4} \le 16$，$m+n \le 8$。故最大值 $= 8$。



7.4 构造三角形

几何构造法

当一个**代数表达式中出现几个距离**（或与距离成比例的量）时，可以尝试**把这些距离安排到一个三角形的三条边上**，然后用三角不等式 / 余弦定理 / 海伦公式等几何关系做约束。

例（构造三角形）.

设 $a, b > 0$，$a + b = 4$，求 $\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+4}$ 的最小值。

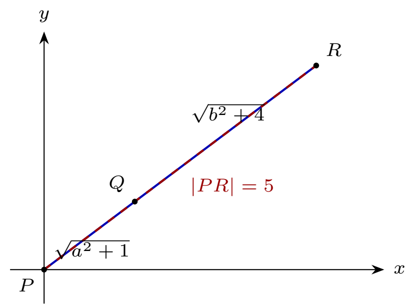
解.

识别：$\sqrt{a^2+1}$ 像是一条**直角边为 a 和 1 的直角三角形的斜边**；$\sqrt{b^2+4}$ 像是直角边为 $b, 2$ 的斜边。

几何布置：如图，把这两条斜边接在一起——构造折线。设 $P = (0,0)$，$Q = (a,1)$，$R = (a+b, 1+2) = (4,3)$。则

$$|PQ| = \sqrt{a^2+1}, \qquad |QR| = \sqrt{b^2+2^2} = \sqrt{b^2+4}.$$

> 故所求 $=|PQ|+|QR|$。由三角不等式，$|PQ|+|QR|\geq|PR|=\sqrt{4^2+3^2}=5$。等号当 P,Q,R 共线（即折线拉直）时取——此时 $\frac{1}{a}=\frac{3}{4}$ 即 $a=\frac{4}{3}$，$b=\frac{8}{3}$，满足 $a,b>0$。
> **最小值 $=5$。**



7.5 圆内接三角形

圆内接三角形的最大面积

一个圆内接三角形的面积，当三角形为**等边三角形**时最大。这是因为固定外接圆半径 R 时，面积 $S=\frac{abc}{4R}$，由 AM-GM 与正弦定理，等边 $\iff$ 三边最”对称”时 abc 最大。

例（圆内接三角形）.

> 设 A,B,C 为单位圆上三点。求 $\triangle ABC$ 的面积最大值。

解.

> 由外接圆半径 $R=1$，三内角 α,β,γ（$\alpha+\beta+\gamma=\pi$）。由正弦定理，三边
>
> $$a=2\sin\alpha,\qquad b=2\sin\beta,\qquad c=2\sin\gamma.$$
>
> 面积 $S=\frac{abc}{4R}=\frac{8\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{4}=2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$。
> **用 AM-GM + 凹凸性**：$\ln\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 上凹，由 Jensen
>
> $$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\leq\left(\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3=\sin^3\frac{\pi}{3}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$
>
> 故 $S\leq2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$。等号在 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$（等边）时取。
> **最大面积 $=\frac{3\sqrt{3}}{4}$。**

注.

> **”关联几何性质” 的本质**：把代数式的结构识别为**几何量**（距离、角、面积、轨迹），然后调用对应几何定理。这一招的门槛**不是代数技巧，而是几何直观**——需要脑海里有”距离和 → 椭圆”、”距离差 → 双曲线”、”张角 → 圆周角 → 轨迹圆”、”两距离之和最小 → 反射法 / 三角不等式”这样的 **条件反射**。

Chapter 8

分离参数法

" 分离参数" 指的是**把参数 a 从主变量 x 中剥离出来**，把不等式 / 方程 / 恒成立问题改写成"$a \ge g(x)$" 或"$a = g(x)$" 的形式。然后问题转为"$g(x)$ 的最值 / 值域"——通常比原问题更直接。

8.1 分离参数的基本操作

分离参数的流程

设问题为" 当 x 属于某范围时，某不等式关于 a 恒成立"。分离参数步骤：

1. 把 a 与 x 代数分离，改写为 $a \ge h(x)$ 或 $a \le h(x)$（取决于不等式方向）。**注意不等式方向是否翻转**——若两端同除某个可能为负的式子，方向翻转。
2. 求 $h(x)$ 在 x 范围内的**最值**：
   - $a \ge h(x)$ 恒成立 $\iff$ $a \ge \max h(x)$；
   - $a \le h(x)$ 恒成立 $\iff$ $a \le \min h(x)$。

例（分离参数求范围）.

> 若 $\forall x \in [1,2]$，不等式 $x^2 - 2ax + 3 \ge 0$ 恒成立。求 a 的取值范围。

解.

分离参数：$x \in [1,2]$ 时 $x > 0$，由 $x^2 - 2ax + 3 \ge 0 \iff 2ax \le x^2 + 3 \iff a \le \dfrac{x^2+3}{2x} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2x}$。

求右端最小：$h(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2x}$，$x \in [1,2]$。

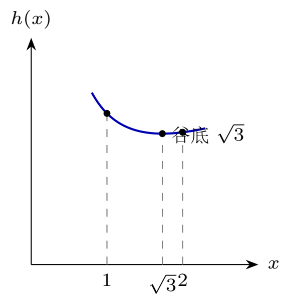
$$h'(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2x^2} = \frac{x^2-3}{2x^2}.$$

$h'(x) = 0 \iff x = \sqrt{3} \approx 1.73 \in [1,2]$，且 h' 在 $x < \sqrt{3}$ 时 < 0（减），$x > \sqrt{3}$ 时 > 0

（增）。故最小值在 $x = \sqrt{3}$：

$$h(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

结论：$a \le \sqrt{3}$。
（"恒成立"要求 a 小于等于所有 x 的 $h(x)$，即 $a \le \min_x h(x) = \sqrt{3}$。）



注.

分离参数的核心优势：把**"关于 a 的恒成立"**转为**"关于 x 的最值"**。后者可用导数、换元、基本不等式等熟悉工具处理。

什么时候不能分离：若不等式中 a 与 x 交织（如 $\ln(ax) + e^{x/a}$），强行分离会造成式子更复杂——此时应**用其他手段**（主元法、构造函数 $f(a, x)$）。

特殊陷阱：若分离时两端同除含 x 的式子 $g(x)$，需讨论 $g(x) > 0$ 或 < 0（方向翻转）、$= 0$（特殊点）。

Chapter 9

分离函数法

与" 分离参数" 类似，" 分离函数" 是把一个复杂方程 / 不等式**拆成两个函数的图象关系**——最常见是 $f(x) = a$ 型（动直线 $y = a$ 与 $y = f(x)$ 的交点个数），或 $f(x) = g(x)$ 型（两条曲线的交点）。然后**通过图象**判断解的存在性、个数、范围。

9.1 动直线与曲线的交点

$f(x) = a$ 的解 $=$ $y = a$ 与 $y = f(x)$ 的公共点

把方程 $f(x) = a$（a 为参数）重新解读为：横坐标 x 使 $y = a$（水平线）与 $y = f(x)$ 曲线的交点横坐标。于是：

- 作出 $y = f(x)$ 的图象（重点：极值、渐近线、零点）；
- 动水平线 $y = a$ 在不同 a 下，数交点个数。

这把**方程解的个数问题**转化为**图象直观判断**——再也不用算判别式。

例（动直线法）.

设 $f(x) = x^3 - 3x$，$x \in \mathbb{R}$。讨论方程 $f(x) = a$ 的实数解的个数（随 a 变化）。

解.

第一步：画 $y = f(x)$ 的大致图象。

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$。$f'(x) = 0 \iff x = \pm 1$。

- $x = -1$：$f(-1) = -1 + 3 = 2$（极大值）；
- $x = 1$：$f(1) = 1 - 3 = -2$（极小值）；
- $x \to \pm\infty$：$f \to \pm\infty$。

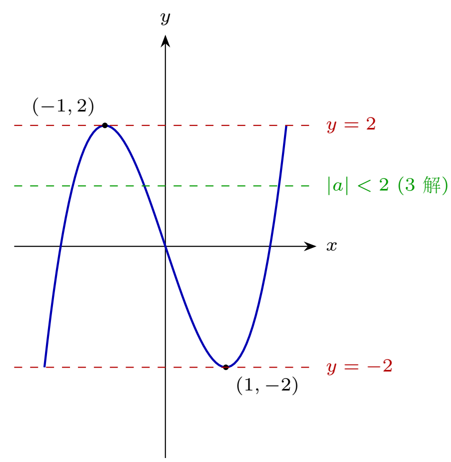
第二步：动水平线 $y = a$ 交点数。

- $a > 2$：只与右侧"↗" 部分交 1 次；解 1 个。

- $a=2$：在 $x=-1$ 相切 + 右侧 1 交点；解 2 个（一个为重根）。
- $-2<a<2$：穿过” 凸 + 凹” 三段，共 3 个交点。
- $a=-2$：在 $x=1$ 相切 + 左侧 1 交点；解 2 个。
- $a<-2$：只与左侧”↘ 后 ↗” 最右升段交 1 次；解 1 个。

汇总：

- $|a|>2$：1 个解；
- $|a|=2$：2 个解；
- $|a|<2$：3 个解。



9.2 变开口函数

含参的开口 / 斜率变化的函数

若函数 $y=f(x;a)$ 的**斜率 / 开口 / 偏移量**随 a 变化（如 $y=ax+b$、$y=ax^2+bx+c$），把它想象为**” 绕某一点旋转 / 开口变化的图象”**。交点位置、极值位置也随之变化——通过画出不同 a 下的” 函数族”，可以判断某些性质何时成立。

例（变斜率）.

若 $\forall x\in[0,1]$，$ax-x^3\geq 0$ 恒成立，求 a 的取值范围。

解.

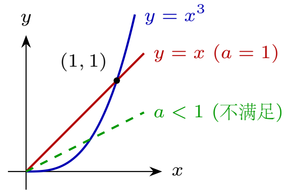
情形 1： $x=0$ 时，$a\cdot 0-0=0\geq 0$，无约束。

情形 2： $x\in(0,1]$，不等式 $ax\geq x^3 \iff a\geq x^2$（除以正数 x 不变向）。

右端 x^2 在 $(0,1]$ 上的最大值为 1（在 $x=1$ 处），故 $a\geq 1$。

图象直观：把原不等式 $ax\geq x^3$ 看作直线 $y=ax$ 与曲线 $y=x^3$ 的关系。在 $[0,1]$ 上 **直线在曲线上方 / 重合** $\iff$ 直线在 $(1,1)$ 处的斜率 $a\geq$ 曲线在 $(1,1)$ 处的割线斜率

$\dfrac{1-0}{1-0}=1$。故 $a\geq 1$。



注.

分离函数与分离参数的关系：

- **分离参数**：代数上把 a 孤立 $\to$ 求 $h(x)$ 的最值；
- **分离函数**：几何上把方程视为两图象的交点 $\to$ 看图象的相对位置。

它们本质上是**同一件事**——分离参数是代数视角，分离函数是几何视角。若不易代数分离，就用函数的图象关系；若代数分离自然，就用导数 / 基本不等式求极值。两者互为补充。

分离函数的适用场景：

1. 参数与主变量交织，代数分离困难；
2. 函数的图象（极值、零点、渐近线）容易刻画；
3. 讨论的是**解的个数**（而非解的具体值）。

Part III

大小比较

Chapter 10

引入中介数字

当两个数 A 和 B 不易直接比较时，**引入一个”中介数字”** C——它介于 A, B 之间，且与两者分别容易比较。如果能证明 $A > C$ 和 $C > B$，就得到 $A > B$（以及反向）。这一思想在指对数、阶乘、不同底幂的大小比较中尤为有效。

10.1 中介数字的选择

什么样的中介数字好用

引入 C 要**同时满足**两个条件：

1. A 与 C 之间有**直接可算**的大小关系（如同底、同指、或可代入特殊函数求值）；

2. C 与 B 之间同样有直接可算的大小关系。

常见选择：

- **”整数界”**：比较 a, b 时，考察是否都在某整数两侧（如 $a < 1 < b$ 是一等奇招）；
- **”对数基准”**：比较底不同的指数（或指数不同的幂），引入 $\ln$；
- **”常见函数值”**：$\sin x$ 与 x 比较时引入 $\tan x$；指数比较时引入 e。

例（中介数字 1）.

比较 $a = \log_3 2$，$b = \log_2 3$ 的大小。

解.

用中介数字 1：

- $a = \log_3 2$：底 $3 > 1$，真数 $2 < 3$，故 $\log_3 2 < \log_3 3 = 1$，即 $a < 1$。
- $b = \log_2 3$：底 $2 > 1$，真数 $3 > 2$，故 $\log_2 3 > \log_2 2 = 1$，即 $b > 1$。

故 $a < 1 < b \Rightarrow a < b$。

例（中介数字——对数基准）.

比较 $a=\log_2 3$ 与 $b=\log_3 5$ 的大小。

解.

尝试 $\dfrac{3}{2}$ 作中介：

- $a=\log_2 3$ vs $\dfrac{3}{2}$：等价于比较 3 与 $2^{3/2}=2\sqrt{2}\approx 2.83$。$3>2\sqrt{2}\Rightarrow a>\dfrac{3}{2}$。
- $b=\log_3 5$ vs $\dfrac{3}{2}$：等价于比较 5 与 $3^{3/2}=3\sqrt{3}\approx 5.196$。$5<3\sqrt{3}\Rightarrow b<\dfrac{3}{2}$。

故 $b<\dfrac{3}{2}<a\Rightarrow b<a$，即 $\log_3 5<\log_2 3$。

注.

选择中介数字的诊断：

1. **先看是否有”整数界”**：如两数分居 $0,1,\frac{1}{2}$ 两侧（这是最简单的）。
2. **看是否有”同底”可凑**：比如 $\log_a b$ vs $\log_c d$，中介可以是 $\log_a d$（同底 a），或 $\log_c b$（同底 c）；
3. **看”估值”的可行性**：中介数字必须能与两边都**用初等变形**直接比，否则就是”多此一举”。

本章方法看起来简单，但对**估值直觉**有要求——选对中介一步到位；选错则陷入死循环。积累常见数值的”估值感”（$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\ln 2\approx 0.693$，$e\approx 2.718$）是基本功。

Chapter 11

放缩

”放缩”是证明不等式的灵魂。核心思路：**把每一项换成一个”已知易处理”的上界或下界**，使整体不等式的证明变得可行。放缩的难点在于”**松紧度”**——放太松得不到所需不等式，放太紧又难以找到合适形式。

11.1 放缩的两大方向

放大和缩小

要证 $\sum a_i \leq M$：

- **放大每一项**：寻找 $b_i \geq a_i$ 使得 $\sum b_i \leq M$ 易证。$\sum a_i \leq \sum b_i \leq M$。

要证 $\sum a_i \geq m$：

- **缩小每一项**：寻找 $c_i \leq a_i$ 使得 $\sum c_i \geq m$ 易证。$\sum a_i \geq \sum c_i \geq m$。

”松紧度”的判断：如果放缩后的界与原式相差太大（比如”$a_i \leq 2a_i$”这种放得太松的放缩），可能**破坏不等式**——要证 $\sum a_i \leq 1$，放到 $\sum 2a_i \leq 2$ 就没用了。

例（三角绑性：放缩法）.

求证：对 $n \geq 2$，

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

解.

放缩策略：直接算 $\sum \frac{1}{k^2}$ 无闭式，需放大每一项使之变成**可裂项**的形式。

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad (k \geq 2).$$

（放大：因 $k^2 > k(k-1)$，故 $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$；后者是**裂项式**。）

累加：

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}<1.$$

得证。■

注.

放缩题的”工具箱”：

- **基本不等式**：$a+b\ge 2\sqrt{ab}$、$\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$；
- **裂项式放缩**：$\dfrac{1}{k^2}<\dfrac{1}{k(k-1)}=\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$、$\dfrac{1}{k^2}>\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$；
- **等比放缩**：$2^k\ge k+1$、$(1+x)^n\ge 1+nx$（伯努利不等式）；
- **对数放缩**：$\ln(1+x)<x$（$x>0$）、$\ln(1+x)\ge\dfrac{x}{1+x}$、$e^x\ge 1+x$；
- **三角放缩**：$\sin x<x<\tan x$（$0<x<\dfrac{\pi}{2}$）。

放缩题的三步思维：

1. 观察要证的上（下）界的”**形状**”：是 1 这种简单整数？还是含 ln、根式的形式？
2. 倒推：上（下）界是”**裂项累加**”还是”**等比求和**”的结果？
3. 根据推测的”累加骨架”，为每一项寻找合适的**放缩上界 / 下界**。

本章的大原则：放缩要”**松紧得当、形式可算**”。放得”**刚好裂成可消项**”是理想情形——这也是裂项放缩在高中考试里最常见的原因。