

初升高数学思维提升

Zircon

Contents

1	斜率 K	3
2	二次函数内接三角形	5
3	极限思想	7
3.1	有理函数在无穷处的极限：三种技巧	7
3.2	增长速率的直觉比较	8
4	切线	10
4.1	切线的两种刻画	10
4.2	切线条数：方程组解数 = 几何交点数	11
4.3	与极限思想的联动	11
5	三角换元	12
5.1	基本换元	12
5.2	最值题套路	12
5.3	何时该用三角换元	13
6	角平分线	14
6.1	角平分线定理	14
6.2	逆定理与应用	15
7	韦达定理与弦长	16
7.1	韦达定理	16
7.2	弦长公式	16
8	圆幂定理	19
8.1	圆幂：一个统一的量	19
8.2	相交弦定理	19
8.3	割线定理（外部）	20
8.4	切割线定理	20
8.5	托勒密定理（Ptolemy）	21
9	倒序相加法	22
9.1	高斯求和	22
9.2	等差数列求和	23
9.3	应用：对称性的另一个例子	23

10 正整数 α 次方的求和	25
10.1 望远镜法的核心引理	25
10.2 Σk^2 的推导	25
10.3 Σk^3 的推导	26
10.4 推广到任意 α	27
11 数形结合	29
11.1 几何解读 1: $ x - a $ 作 1 维距离	29
11.2 几何解读 2: $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ 作 2 维距离	30
11.3 几何解读 3: 直接”画出来”	30
11.4 结语	31

Chapter 1

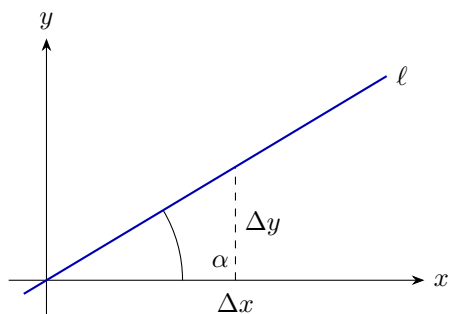
斜率 K

平面直角坐标系中，若一条非竖直直线与 x 轴正方向的夹角为 α ($0 \leq \alpha < \pi$)，则定义该直线的斜率为

$$k = \tan \alpha.$$

几何上， k 衡量“每向右走 1 单位， y 上升多少”；代数上，对直线上任意两点 $P_1(x_1, y_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2)$ ($x_1 \neq x_2$)，有

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



定义 1.1: 斜率

一条非竖直直线 l 的斜率为其倾角 α 的正切值 $k = \tan \alpha$ 。竖直直线的斜率不存在 (或约定为 ∞)。

命题 1.2: 平行与垂直判据

设两条直线 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2 (均存在)，则

$$l_1 \parallel l_2 \iff k_1 = k_2, \quad l_1 \perp l_2 \iff k_1 k_2 = -1.$$

例 (两点求斜率)。

求经过 $A(-1, 2)$ 与 $B(3, -4)$ 的直线斜率。

解.

由两点式,

$$k = \frac{-4 - 2}{3 - (-1)} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}.$$

例 (垂直判定) .

直线 $\ell_1 : y = 2x + 1$ 与 $\ell_2 : y = -\frac{1}{2}x + 5$ 是否垂直?

解.

$k_1 = 2$, $k_2 = -\frac{1}{2}$, 故 $k_1 k_2 = -1$, 二者垂直。

Chapter 2

二次函数内接三角形

本章围绕一个典型问题：在一条给定抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上任取三点 A, B, C 构成三角形 $\triangle ABC$ ，当其中两点固定、第三点在抛物线上移动时，何时三角形面积最大？答案看似几何，本质却是用导数刻画切线斜率。

命题 2.1: 抛物线内接三角形最大面积判据

设 A, B 为抛物线 $\Gamma: y = f(x)$ 上的两个固定点 (f 可微), C 为 Γ 上动点。则 $\triangle ABC$ 面积取最大值时,

抛物线在 C 处的切线 $\parallel AB$ 。

证.

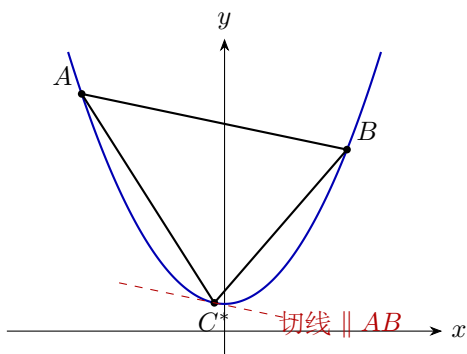
设 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ 。弦 AB 为定直线，记其所在直线为 l_{AB} 。三角形面积

$$S = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot d(C, l_{AB}),$$

其中 $|AB|$ 为定值，故 S 最大 $\iff C$ 到 l_{AB} 的距离 $d(C, l_{AB})$ 最大。

考虑与 l_{AB} 平行的直线族。在抛物线上找到这样的点 C^* ：抛物线在 C^* 处的切线恰与 l_{AB} 平行。几何上，把 l_{AB} 向外平移直至“刚好”与抛物线相切，切点就是 C^* ，此时 $d(C^*, l_{AB})$ 达到极值。

代数上，记 l_{AB} 斜率为 k_{AB} 。 C 到 l_{AB} 的距离 $d(C, l_{AB})$ 关于 C 的横坐标可微，令其导数为零，恰得 $f'(x_C) = k_{AB}$ ，即切线 $\parallel AB$ 。 ■



例 (最大面积的三角形) .

已知 $A(-2, 4)$, $B(1, 1)$ 在抛物线 $y = x^2$ 上。点 C 在抛物线上且位于 A, B 之间。求 $\triangle ABC$ 面积的最大值及对应的 C 点坐标。

解.

弦 AB 的斜率

$$k_{AB} = \frac{1 - 4}{1 - (-2)} = -1.$$

抛物线 $y = x^2$ 的导函数为 $y' = 2x$ 。由上述命题, C 处切线斜率等于 k_{AB} :

$$2x_C = -1 \implies x_C = -\frac{1}{2}, y_C = \frac{1}{4}.$$

故 $C(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ 。

接下来算面积。 AB 所在直线: $y = -x + 2$, 即 $x + y - 2 = 0$ 。点 C 到此直线距离

$$d = \frac{|(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{4} - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|-2.25|}{\sqrt{2}} = \frac{9}{4\sqrt{2}}.$$

$|AB| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ 。于是

$$S_{\max} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{9}{4\sqrt{2}} = \frac{27}{8}.$$

注.

这个“切线 \parallel 弦”的洞察可以拓展: 在任意凸曲线上取两点 A, B , 若第三点 C 让 $\triangle ABC$ 面积最大, 则曲线在 C 处切线平行于 AB 。这正是拉格朗日中值定理的几何直观——弦的斜率等于中间某点切线斜率。

Chapter 3

极限思想

”极限”在高中阶段是一种**思维方式**——当某个变量趋于无穷（或趋于某个特殊值）时，表达式的行为会”坍缩”到一个更简单的形式。本章聚焦两类最常用情形：有理函数在无穷处的极限，和几种常见函数的增长速率比较。

3.1 有理函数在无穷处的极限：三种技巧

定义 3.1: $x \rightarrow \infty$ 型极限

若 $f(x)$ 是两个多项式的商 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ，记 P, Q 次数分别为 p, q 。我们关心

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

技巧一：变量代换 $t = 1/x$

令 $t = 1/x$ ，则 $x \rightarrow \infty \iff t \rightarrow 0^+$ 。把所有 x 换成 $1/t$ ，问题就转化为 $t \rightarrow 0$ 的极限。适用于分子分母同次或低次多于高次的情形。

例（代换法）。

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 5}{2x^2 + 7}.$$

解。

令 $t = 1/x$ ，则

$$\frac{3x^2 - x + 5}{2x^2 + 7} = \frac{3 - t + 5t^2}{2 + 7t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{3}{2}.$$

技巧二：分离常数（多项式长除法）

当 $\deg P \geq \deg Q$ 时，作长除法把 P/Q 写成“多项式 + 真分式”。剩下的真分式当 $x \rightarrow \infty$ 时趋于 0，只看多项式部分的行为。

例（分离常数）。

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 3}.$$

解。

$$\frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 3} = x + \frac{5x + 1}{x^2 - 3}.$$

当 $x \rightarrow +\infty$ ，真分式 $\rightarrow 0$ ，故结果 $= +\infty$ 。当 $x \rightarrow -\infty$ ，结果 $= -\infty$ 。

技巧三：次数比较

对 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ ($p = \deg P$, $q = \deg Q$, 最高次系数分别为 a_p, b_q):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \frac{a_p}{b_q}, & p = q, \\ 0, & p < q, \\ \pm\infty, & p > q \text{ (符号由 } a_p/b_q \text{ 与 } x \text{ 的符号决定)}. \end{cases}$$

这条其实是前两个技巧的“秒杀”结论。

例（次数比较）。

$$\text{求: (1) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 7}{2x^2 + 3}; \text{ (2) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1}{3x^2 - x}; \text{ (3) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 + x}{x^2 + 1}.$$

解。

- (1) 分母次数更高，极限为 0。
 (2) 同次，最高次系数比 $= \frac{4}{3}$ ，故极限为 $\frac{4}{3}$ 。
 (3) 分子次数更高，最高次系数为 -2 ，又 $x \rightarrow +\infty$ ，故极限为 $-\infty$ 。

3.2 增长速率的直觉比较

当 $x \rightarrow +\infty$ ，对 $a > 1$, $k > 0$,

$$\log_a x \ll x^k \ll a^x \ll x! \ll x^x.$$

这里 $f \ll g$ 表示 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 0$, 即 g ”压倒” f 。

注.

- 多项式被指数压倒: x^{100} 看上去很大, 但只要 x 够大, 2^x 就甩开它几个数量级。
- 对数被多项式压倒: $\log x$ 增长奇慢, 任何正幂 $x^{0.0001}$ 都能最终超过它。
- 在算法分析、渐近估计中, 这张排序表就是大 O 记号的骨架。

例 (混合比较) .

判断 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{10} \log x}{2^x}$ 。

解.

分子的增长速率由主导项 2^x 压倒 ($2^x \gg x^{10} \gg \log x$, 故 $2^x \gg x^{10} \log x$), 极限为 0。

Chapter 4

切线

切线是“曲线在某点的最好线性逼近”。它把微观的“变化率”与宏观的“几何位置”连接起来，是整个解析几何 & 微积分桥梁的骨架。

4.1 切线的两种刻画

定义 4.1: 切线（几何刻画）

设 P 是曲线 Γ 上一点。若直线 l 过 P 且“仅与 Γ 在 P 附近有一个重合的交点”（即 l 与 Γ 在 P 处相切），则称 l 为 Γ 在 P 处的切线。

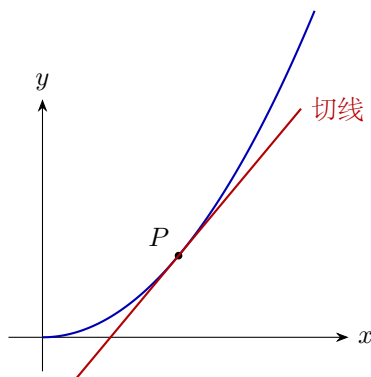
定义 4.2: 切线（变化率刻画）

若 $\Gamma: y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 可导，则 Γ 在 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率为

$$k = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

切线方程为 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ 。

这两种定义在“好”的曲线上等价。“**导数是切线斜率**”——这是高中阶段最重要的一句话。



4.2 切线条数：方程组解数 = 几何交点数

一个经典问题：过一个外点 P_0 向曲线引切线，能引出几条？这等价于问一个方程的解的个数。

例（外点向抛物线引切线）。

过点 $P_0(1, -3)$ 向抛物线 $\Gamma: y = x^2$ 引切线，能引出几条？分别求切线方程。

解.

设切点为 $P(t, t^2)$ 。抛物线在 P 处切线斜率为 $y'|_{x=t} = 2t$ ，切线方程

$$y - t^2 = 2t(x - t) \implies y = 2tx - t^2.$$

切线须过 $P_0(1, -3)$ ：

$$-3 = 2t \cdot 1 - t^2 \implies t^2 - 2t - 3 = 0 \implies (t - 3)(t + 1) = 0.$$

故 $t = 3$ 或 $t = -1$ ，共两条切线：

$$\ell_1: y = 6x - 9, \quad \ell_2: y = -2x - 1.$$

注.

一般规则：若外点 P_0 在二次曲线外部，可引两条切线；在曲线上，一条；在内部，零条。这完全对应“关于 t 的二次方程有 0/1/2 个实根”。

4.3 与极限思想的联动

上一章讲“ $x \rightarrow \infty$ 时表达式行为”，本章讲“ $\Delta x \rightarrow 0$ 时比值行为”。看似方向相反，其实都是让某个量“逼近特殊值”，观察表达式被压缩到什么——这是所有分析学的共同底色。

例（用极限算导数）。

用极限定义求 $f(x) = x^2$ 的导数。

解.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Chapter 5

三角换元

凡是题目里出现 $x^2 + y^2 = r^2$ 、 $\sqrt{1-x^2}$ 、 $\sqrt{a^2-x^2}$ 这类“圆的方程”或“根号减平方”，都可以考虑用三角函数换元，把二元约束变成单参数，从而把“在圆周上求最值”这类几何题压缩为“关于一个角 θ 的三角函数题”。

5.1 基本换元

命题 5.1: 圆周参数化

点 (x, y) 在圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 上 \iff 存在 $\theta \in [0, 2\pi)$ 使得

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

命题 5.2: 根号平方型

若出现 $\sqrt{a^2-x^2}$ ($|x| \leq a$)，可令 $x = a \sin \theta$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ，则 $\sqrt{a^2-x^2} = a \cos \theta \geq 0$ ，根号自然消去。

类似地， $\sqrt{a^2+x^2}$ 可令 $x = a \tan \theta$ ， $\sqrt{x^2-a^2}$ 可令 $x = a \sec \theta$ 。

5.2 最值题套路

例（圆周上求线性函数最值）。

点 (x, y) 满足 $x^2 + y^2 = 4$ ，求 $3x + 4y$ 的最大值与最小值。

解。

令 $x = 2 \cos \theta$, $y = 2 \sin \theta$ 。则

$$3x + 4y = 6 \cos \theta + 8 \sin \theta = 10 \sin(\theta + \varphi),$$

其中 $\tan \varphi = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ （辅助角公式）。因 $\sin(\cdot) \in [-1, 1]$ ，最大值 10，最小值 -10。

注.

几何上, $3x + 4y = c$ 是一族平行直线. 让它扫过圆, 与圆相切时 $|c|$ 最大. 圆心 $(0, 0)$ 到直线 $3x + 4y = c$ 的距离 $\frac{|c|}{5} \leq 2$, 即 $|c| \leq 10$. 两种方法殊途同归.

例 (带根号的最值) .

求 $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上的最大值.

解.

令 $x = \sin \theta$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 则 $\sqrt{1-x^2} = \cos \theta$, 故

$$f = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}).$$

当 $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 即 $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\sin = 1$, $f_{\max} = \sqrt{2}$. 此时 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

例 (圆上两点距离) .

已知 $A(1, 0)$, P 在单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上. 求 $|AP|$ 的取值范围.

解.

令 $P = (\cos \theta, \sin \theta)$.

$$|AP|^2 = (\cos \theta - 1)^2 + \sin^2 \theta = 2 - 2 \cos \theta.$$

$\cos \theta \in [-1, 1]$, 故 $|AP|^2 \in [0, 4]$, 即 $|AP| \in [0, 2]$.

5.3 何时该用三角换元

注.

题目具备如下特征之一, 考虑三角换元:

- 变量满足形如 $x^2 + y^2 = r^2$ 的平方和约束;
- 表达式含 $\sqrt{a^2 - x^2}$ 、 $\sqrt{a^2 + x^2}$ 或 $\sqrt{x^2 - a^2}$;
- 要求的是带约束的最值或轨迹。

核心思想: 把 k 元约束变量通过三角函数压缩到 $k-1$ 个自由参数。

Chapter 6

角平分线

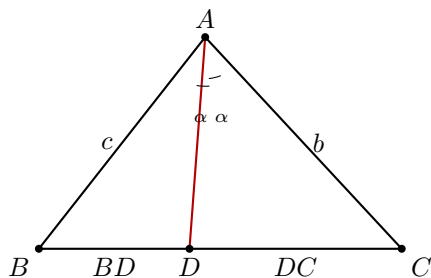
角平分线定理在初中就学过结论，但它的证法（特别是用面积比证）体现了“同一个量用两种方式算”的思想——这正是许多几何证明的底色。

6.1 角平分线定理

定理 6.1: 角平分线定理

在 $\triangle ABC$ 中，设 AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线， D 在 BC 上。则

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$



证（面积比法）。

记 $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$ ， $AB = c$ ， $AC = b$ ， $AD = d$ 。

思路：用两种方式计算 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的面积比。

方式一（共顶点 A 、夹角为 α ）：

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD \cdot \sin \alpha} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}.$$

方式二（共顶点 A 、 D 到底边 BC 的高相同）：两个小三角形公用从 A 到 BC 的同一条高 h_A ，故

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BD \cdot h_A}{\frac{1}{2} \cdot DC \cdot h_A} = \frac{BD}{DC}.$$

两式左端相同，故

$$\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b} = \frac{AB}{AC}.$$

注.

证法的核心是”同一个量，两种数法”。面积比既可以按边长和夹角算，又可以按底和高算。这个双重观点在许多比例型定理里都有效（如 Ceva、Menelaus、Stewart 等）。

6.2 逆定理与应用

定理 6.2: 角平分线定理的逆定理

若 $D \in BC$ 使 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ ，则 AD 平分 $\angle BAC$ 。

例（角平分线切 BC ）。

在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 7$ ， $AC = 5$ ， $BC = 9$ 。 $\angle BAC$ 的角平分线交 BC 于 D 。求 BD 和 DC 。

解.

由角平分线定理， $\frac{BD}{DC} = \frac{7}{5}$ ，且 $BD + DC = 9$ 。

$$BD = 9 \cdot \frac{7}{12} = \frac{63}{12} = \frac{21}{4}, \quad DC = 9 \cdot \frac{5}{12} = \frac{45}{12} = \frac{15}{4}.$$

Chapter 7

韦达定理与弦长

一元二次方程是初升高衔接最“硬”的一块。韦达定理不仅告诉你根与系数的关系，更是解析几何里“直线与圆锥曲线相交”问题的万能工具——因为几乎所有“弦”的信息都能转化为韦达公式的线性组合。

7.1 韦达定理

定理 7.1: 韦达定理

若一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两根为 x_1, x_2 , 则

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

证.

由求根公式 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, 直接相加相乘即得。

更简洁的代数证明: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2]$, 比较系数即得。 ■

注.

韦达定理的威力在于: 很多问题不需要解出 x_1, x_2 各自的值, 只需要 $x_1 + x_2$ 和 $x_1 x_2$ 就能推出答案。

7.2 弦长公式

设直线 $l: y = kx + m$ 与曲线交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 。则

$$|AB|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2(1 + k^2).$$

又

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2,$$

故

弦长公式

$$|AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}.$$

把“交点的横坐标”通过韦达定理整体刻画，避免求具体的交点坐标。

例（抛物线弦长）.

直线 $y = x - 1$ 与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于 A, B . 求 $|AB|$.

解.

代入得 $(x-1)^2 = 4x$, 即 $x^2 - 6x + 1 = 0$. 由韦达定理 $x_1 + x_2 = 6$, $x_1x_2 = 1$. 又 $k = 1$.

$$|AB| = \sqrt{1+1^2} \cdot \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{64} = 8.$$

例（椭圆内接三角形的面积）.

直线 $l: y = kx + 1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 交于 A, B . 求 k 使得 $\triangle OAB$ 面积最大 (O 为原点).

解.

代入椭圆方程:

$$\frac{x^2}{4} + (kx + 1)^2 = 1 \implies (1 + 4k^2)x^2 + 8kx + 0 = 0.$$

等等, 展开仔细: $\frac{x^2}{4} + k^2x^2 + 2kx + 1 = 1$, 即 $(\frac{1}{4} + k^2)x^2 + 2kx = 0$,

$$(1 + 4k^2)x^2 + 8kx = 0.$$

由韦达 $x_1 + x_2 = -\frac{8k}{1+4k^2}$, $x_1x_2 = 0$. 于是一根为 0 (恰对应 l 与 y 轴的交点 $(0, 1)$). 这个特例让结果退化.

换一种设置: 让 l 不过 y 轴固定截距, 改设 $l: y = kx + m$ 且 m 可变, 求 $|OA||OB|$ 最大时 m, k . 完整讨论留给读者, 以上只演示了弦长公式的机械流程.

注.

做解析几何大题时, 一般路线是:

1. 设直线方程 (分斜率存在/不存在两种讨论);

2. 联立代入曲线, 得到关于 x 的二次方程;
3. 用**韦达定理**得 $x_1 + x_2, x_1x_2$;
4. 用**弦长公式**、**距离公式**或**向量内积**把题目要求的量写成 $x_1 + x_2, x_1x_2$ 的函数;
5. 代入并化简, 求最值或解方程。

这是解析几何”韦达流”的完整套路。

Chapter 8

圆幂定理

圆幂定理 (Power of a Point) 是一族由相似三角形推出的乘积等式。它把”点对圆的位置关系”统一成一个数——圆幂，把三类常见几何构型 (相交弦、割线、切割线) 归约到同一个公式。

8.1 圆幂：一个统一的量

定义 8.1: 点对圆的圆幂

设 $\odot O$ 半径为 r , P 为平面上一点。定义 P 对 $\odot O$ 的圆幂为

$$\text{pow}(P, \odot O) = |PO|^2 - r^2.$$

符号: P 在圆外时为正, 在圆上为 0, 在圆内为负。

圆幂在几何上的精妙之处: 对任意过 P 的直线 ℓ , 若 ℓ 与圆交于 A, B 两点 (按”有向”理解: P 在内则 A, B 异侧, P 在外则同侧), 有

$$\vec{PA} \cdot \vec{PB} = \text{pow}(P, \odot O).$$

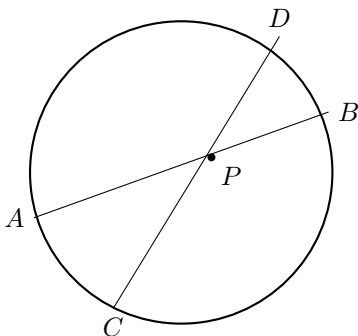
这意味着 $PA \cdot PB$ 只依赖于 P 和圆, 与所选直线无关。下面的三条定理都是这条元事实的具体表述。

8.2 相交弦定理

定理 8.2: 相交弦定理

若两条弦 AB, CD 在圆内交于 P , 则

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$



证 (相似三角形) .

连 AC, BD 。在 $\triangle PAC$ 与 $\triangle PDB$ 中,

- $\angle APC = \angle DPB$ (对顶角);
- $\angle PAC = \angle PDB$ (同弧 BC 所对圆周角相等)。

故 $\triangle PAC \sim \triangle PDB$, 得 $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$, 即 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ 。 ■

8.3 割线定理 (外部)

定理 8.3: 割线定理

若 P 在 $\odot O$ 外, 过 P 的两条割线分别交圆于 A, B 与 C, D ($PA < PB$), 则

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

证明类似: 用 $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ (圆内接四边形 $ACBD$ 外角 = 内对角) 即可。

8.4 切割线定理

定理 8.4: 切割线定理

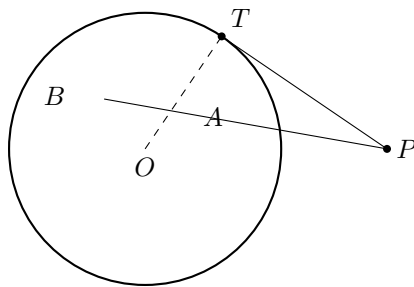
若 P 在 $\odot O$ 外, PT 是圆的切线 (T 为切点), PAB 是过 P 的割线, 则

$$PT^2 = PA \cdot PB.$$

证.

连 TA, TB 。弦切角 $\angle PTA =$ 弦 TA 所对的圆周角 $\angle TBA = \angle PBT$ 。又 $\angle TPA = \angle BPT$ (公共角), 故 $\triangle PTA \sim \triangle PBT$, 得

$$\frac{PT}{PB} = \frac{PA}{PT} \implies PT^2 = PA \cdot PB. \quad \blacksquare$$



例 (切割线计算) .

P 在圆外, $PT = 6$ 切圆于 T , P 向圆作割线 PAB 且 $PA = 4$. 求 AB .

解.

$PT^2 = PA \cdot PB \implies 36 = 4 \cdot PB \implies PB = 9$. 故 $AB = PB - PA = 5$.

8.5 托勒密定理 (Ptolemy)

定理 8.5: 托勒密定理

若四边形 $ABCD$ 内接于圆 (圆内接四边形), 则

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

(两条对角线之积 = 两组对边之积之和。) 对于任意凸四边形, \geq 号成立: $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC$ (托勒密不等式)。

注.

托勒密定理的经典应用之一是导出正弦/余弦和差公式。取单位圆上四点构造等腰梯形并套用托勒密, 即可导出 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ 。有兴趣的读者可以自行推导。

例 (用托勒密求对角线) .

已知圆内接四边形 $ABCD$ 中 $AB = 3$, $BC = 5$, $CD = 6$, $DA = 4$, $AC = 7$. 求 BD .

解.

由托勒密,

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC \implies 7 \cdot BD = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 38 \implies BD = \frac{38}{7}.$$

Chapter 9

倒序相加法

高斯在小学时期的传说：老师让学生算 $1 + 2 + \cdots + 100$ ，高斯几秒钟就给出答案 5050。他用的就是倒序相加法——本章的主角。这个技巧的核心思想是“利用对称性把一个求和变成”翻倍后每一项都相同”。

9.1 高斯求和

定理 9.1: 高斯求和

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

证（倒序相加）.

设 $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ 。把它倒过来写： $S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$ 。两式对应相加：

$$\begin{array}{r} S = 1 + 2 + \cdots + n \\ S = n + (n-1) + \cdots + 1 \\ \hline 2S = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) \end{array}$$

一共 n 项，每项都是 $n+1$ 。故 $2S = n(n+1)$ ，即 $S = \frac{n(n+1)}{2}$ 。 ■

注.

”倒序相加”本质是：一个长度为 n 的序列 a_1, a_2, \dots, a_n 若满足对称性 $a_k + a_{n+1-k} =$ 常数 C ，则 $\sum a_k = \frac{nC}{2}$ 。

9.2 等差数列求和

定理 9.2: 等差数列求和

设 $\{a_n\}$ 是首项 a_1 、公差 d 的等差数列, $a_n = a_1 + (n-1)d$ 。则

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

证 (倒序相加) .

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$; 倒序 $S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1$ 。对应相加: 第 k 项之和为

$$a_k + a_{n+1-k} = [a_1 + (k-1)d] + [a_1 + (n-k)d] = 2a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n.$$

共 n 对, 故 $2S_n = n(a_1 + a_n)$, 即得证。 ■

例 (高斯秒算) .

求 $7 + 10 + 13 + \cdots + 100$ 。

解.

这是首项 7、公差 3、末项 100 的等差数列。项数

$$n = \frac{100 - 7}{3} + 1 = 32.$$

$$\text{和 } S = \frac{32 \cdot (7 + 100)}{2} = 16 \cdot 107 = 1712.$$

9.3 应用: 对称性的另一个例子

例 (对称积分式求值) .

$$\text{求 } S = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

解.

这不用倒序相加, 但体现了同样的“双重表达”精神。注意 $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (组合数的对称性)。但最快的解法是二项式定理:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = S \implies S = 2^n.$$

■ 对称性的用法在这里与倒序相加殊途同归：都是发现“两个看似不同的表达式相等”。

例（三角数列）。

■ 求 $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ$ 。

解。

■ 记 $S = \sum_{k=1}^{89} \sin^2 k^\circ$ 。倒序写一份： $S = \sum_{k=1}^{89} \sin^2(90^\circ - k^\circ) = \sum_{k=1}^{89} \cos^2 k^\circ$ 。两式相加：

$$2S = \sum_{k=1}^{89} (\sin^2 k^\circ + \cos^2 k^\circ) = 89 \implies S = \frac{89}{2}.$$

Chapter 10

正整数 α 次方的求和

高斯求和解决了 $\sum k$, 但 $\sum k^2, \sum k^3$ 如何计算? 本章用望远镜求和法 (telescoping), 从恒等式 $(k+1)^\alpha - k^\alpha$ 出发, 层层推出 $\sum k^\alpha$ 的闭式。

10.1 望远镜法的核心引理

引理 10.1: 望远镜求和

对任何数列 $\{b_k\}$,

$$\sum_{k=1}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1.$$

证.

展开并看中间项互相抵消:

$$(b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_{n+1} - b_n) = b_{n+1} - b_1.$$

这是所有“从差分推出和”的技巧的出发点。

10.2 $\sum k^2$ 的推导

定理 10.2: 平方和公式

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

证.

取 $b_k = k^3$ 。则

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

对 $k = 1, 2, \dots, n$ 求和:

$$\sum_{k=1}^n [(k+1)^3 - k^3] = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1.$$

左边望远镜抵消后 $= (n+1)^3 - 1$ 。设 $T = \sum k^2$ ，又 $\sum k = \frac{n(n+1)}{2}$ ， $\sum 1 = n$ 。代入:

$$(n+1)^3 - 1 = 3T + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n.$$

展开左边: $(n+1)^3 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n = n(n+1)(n+2) - n$ 。

直接算也可以:

$$3T = (n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n = n^3 + 3n^2 + 2n - \frac{3n(n+1)}{2}.$$

通分化简:

$$3T = \frac{2n^3 + 6n^2 + 4n - 3n^2 - 3n}{2} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

故 $T = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 。 ■

例 (数值验证) .

$n = 3$: $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$; 公式 $\frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} = 14$, 一致。

10.3 $\sum k^3$ 的推导

定理 10.3: 立方和公式

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

证.

取 $b_k = k^4$ 。则

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1.$$

对 $k = 1, \dots, n$ 求和, 左边望远镜得 $(n+1)^4 - 1$ 。记 $U = \sum k^3$:

$$(n+1)^4 - 1 = 4U + 6 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n.$$

化简:

$$4U = (n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n.$$

注意 $n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n = n[(n+1)(2n+1) + 2(n+1) + 1] = n[(n+1)(2n+3) + 1] = n(2n^2 + 5n + 4)$ (有点乱, 直接展开)。

一个更干净的途径: 注意 $(n+1)^4 - 1 = [(n+1)^2 - 1][(n+1)^2 + 1] = n(n+2) \cdot (n^2 + 2n + 2)$, 所以

$$(n+1)^4 - 1 = n(n+2)(n^2 + 2n + 2).$$

手算或代入 $n=2$ 验证: $81 - 1 = 80$, $2 \cdot 4 \cdot 10 = 80$, 对。

设 $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$, $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 。则

$$4U = (n+1)^4 - 1 - 6S_2 - 4S_1 - n.$$

这是纯粹的代数化简, 最终得到

$$U = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = S_1^2.$$

直接验证比硬算更短: 取 $n=1$, $U=1$, $S_1^2=1$; $n=2$, $U=9$, $S_1^2=9$; $n=3$, $U=36$, $S_1^2=36$ 。 ■

注.

一个“形意优美”的观察: $\sum k^3 = (\sum k)^2$ 。即“前 n 个立方数之和等于前 n 个数之和的平方”。这个恒等式被称为 **尼科马科斯定理** (Nicomachus' Theorem), 有非常直观的几何拼图证明 (用边长递增的正方形瓦片拼大正方形)。

10.4 推广到任意 α

注.

一般地, 取 $b_k = k^{\alpha+1}$, 展开 $(k+1)^{\alpha+1} - k^{\alpha+1}$ 为 $k^0, k^1, \dots, k^\alpha$ 的线性组合, 求和后就能把 $\sum k^\alpha$ 用 $\sum k^{\alpha-1}, \sum k^{\alpha-2}, \dots$ 表达。这是**递推**: 已知更低次的和, 就能推出更高次的和。

高斯早在 10 岁就已经隐约掌握这类结构了。在大学你将看到这套方法被推广到**伯努利数 / 伯努利多项式**的框架下, 统一处理 $\sum k^\alpha$ 对任意 α 。

例 (综合应用) .

$$\text{求 } \sum_{k=1}^{10} (k^2 + 3k).$$

解.

利用分配:

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 + 3 \sum_{k=1}^{10} k = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 3 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 385 + 165 = 550.$$

Chapter 11

数形结合

“数”与“形”是数学的两只眼睛：代数让你能精确计算，几何让你能直观理解。数形结合的核心能力，是把一个代数表达式翻译成几何图形，进而借助图形的直观优势快速读出结论。

11.1 几何解读 1: $|x - a|$ 作 1 维距离

在数轴上， $|x - a|$ 恰好是点 x 到点 a 的距离。这把绝对值的代数运算转成点在数轴上的位置运动。

例（绝对值不等式）。

求解 $|x - 1| + |x + 2| \leq 5$ 。

解。

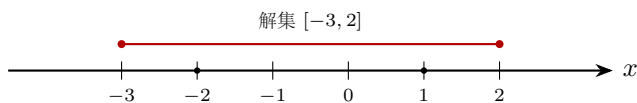
几何翻译： $|x - 1|$ 是 x 到 1 的距离， $|x + 2| = |x - (-2)|$ 是 x 到 -2 的距离。题目即

$$d(x, 1) + d(x, -2) \leq 5.$$

在数轴上，点 1 与点 -2 相距 3。若 x 夹在 $[-2, 1]$ 之间，两段距离之和恰为 $3 \leq 5$ ，必然成立。若 x 在 $[-2, 1]$ 之外，距离和超过 3。设 x 到最近端点的距离为 d_{out} ，则两段距离之和 $= 3 + 2d_{\text{out}}$ 。要求

$$3 + 2d_{\text{out}} \leq 5 \iff d_{\text{out}} \leq 1.$$

故 x 最多可以在 $[-2, 1]$ 左右各延伸 1 个单位： $x \in [-3, 2]$ 。



11.2 几何解读 2: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ 作 2 维距离

在平面上, $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ 是点 (x, y) 到点 (a, b) 的距离。凡含“两个平方开根号”的表达式, 都应尝试翻译成平面距离。

例 (带根号的最值) .

求 $f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 4} + \sqrt{(x-5)^2 + 9}$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 上的最小值。

解.

几何翻译: 把 $f(x)$ 读作: 在平面上, 点 $P(x, 0)$ 在 x 轴上移动; $f(x) = |PA| + |PB|$, 其中

$$A = (1, 2), \quad B = (5, 3).$$

(因为 $\sqrt{(x-1)^2 + 2^2} = |PA|$, $\sqrt{(x-5)^2 + 3^2} = |PB|$.)

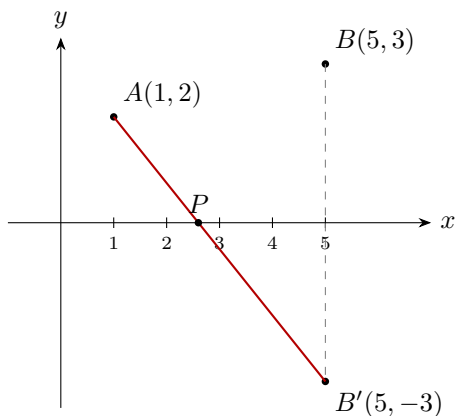
所求即“点 P 在 x 轴上, $|PA| + |PB|$ 的最小值”。**镜像反射法:** 把 B 关于 x 轴对称得 $B' = (5, -3)$ 。则对 x 轴上任意 P , $|PB| = |PB'|$ 。故

$$f(x) = |PA| + |PB'| \geq |AB'|.$$

等号当 P 在线段 AB' 上 (即 P 是 AB' 与 x 轴交点) 时成立。

$$|AB'| = \sqrt{(5-1)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}.$$

故 $f_{\min} = \sqrt{41}$ 。



11.3 几何解读 3: 直接“画出来”

许多不等式题只要把左右两边画成图像, 答案就一目了然。

例 (函数图像比较) .

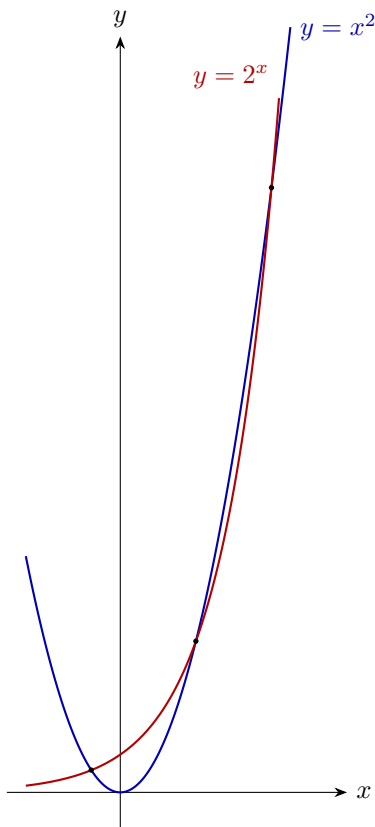
设 $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$, 比较 $f(4)$ 与 $g(4)$; $f(5)$ 与 $g(5)$ 。一般地, 讨论方程 $x^2 = 2^x$ 的实根个数。

解.

$f(4) = 16, g(4) = 16$: 相等. $f(5) = 25, g(5) = 32$: $g > f$.

画图: f, g 都过 $(2, 4)$ ($2^2 = 2^2$) 与 $(4, 16)$ 。还有一个负实根 (当 $x < 0$ 时 $x^2 > 0, 2^x \in (0, 1)$, 易见两图在 $x \approx -0.77$ 处相交)。因此 $x^2 = 2^x$ 共有 **3 个实根**。

一般原则: 用代数计算验证几何直观——直觉可能误导, 最终要用导数或精细估计来闭合论证。



11.4 结语

注.

数形结合不是万能钥匙, 但它是考场上最能“救命”的思维方式——当你觉得代数路径越算越乱时, 停下来画张图, 常常会得到意想不到的简洁思路。

关键口诀:

- 看到平方和开根号, 想距离;
- 看到绝对值, 想数轴上的点与距离;
- 看到比较或方程根的个数, 把函数图像画出来;
- 看到圆、椭圆、抛物线, 记得它们的定义是一种“距离约束”。

代数与几何，互为彼此的“翻译”。能自由切换，才是真正掌握数学的入门之匙。