

概率（必修二部分）

Zircon

Contents

I 概型基础	3
1 计数原理	4
1.1 分类加法计数原理	4
1.2 分步乘法计数原理	4
1.3 排列与组合	5
2 古典概型	6
2.1 样本空间与事件	6
2.2 事件间的运算	6
3 几何概型	8
3.1 几何概型的定义	8
II 事件关系	10
4 放回与不放回	11
4.1 不放回抽取	11
4.2 有放回抽取	12
4.3 对比: 放回 vs 不放回的典型题	12
5 事件的独立性	14
5.1 独立性的定义与判定	14
5.2 n 重独立重复试验	15
5.3 独立性判定的陷阱	15
6 条件概率	18
6.1 条件概率的定义	18
6.2 全概率公式	19
III 数字特征	21
7 方差	22
7.1 方差的定义与计算公式	22

IV 精选题	25
8 精选题	26
8.1 多选题的概率（多选）	26
8.2 NBA 七场四胜制	27
8.3 综合题的破题思路	28

Part I

概型基础

Chapter 1

计数原理

概率的基础是计数——事件发生的“有利情况数”与“所有情况数”之比。两条基本原理串联了所有计数问题：分类加法与分步乘法。

1.1 分类加法计数原理

分类加法计数原理

完成一件事有 n 类办法，第 i 类办法中有 m_i 种不同的方法，则完成这件事共有

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种不同的方法。

关键词：“类”——不同类之间互斥，完成这件事只需选用任一类中的任一种方法。

1.2 分步乘法计数原理

分步乘法计数原理

完成一件事需要 n 个步骤，第 i 步有 m_i 种不同的做法，则完成这件事共有

$$m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$$

种不同的方法。

关键词：“步”——每一步都必须做，每一步内部独立地有多种选择。

例（从“加”到“乘”的组合使用）。

某同学从学校到家有 3 条直达路线，也可选择先到图书馆再回家——学校到图书馆有 2 条路，图书馆到家有 4 条路。问从学校到家共有多少种走法？

解.

先分类:

- 类一 (直达): 3 种走法;
- 类二 (经过图书馆): 需分两步——先选学校 \rightarrow 图书馆 (2 种), 再选图书馆 \rightarrow 家 (4 种), 由乘法原理此类共 $2 \times 4 = 8$ 种。

两类互斥, 由加法: $3 + 8 = 11$ 种。

注.

加与乘的辨别:

- 加法 (“分类”): 完成任务有不同方案, 每方案独立可达目标——“做其一即可”;
- 乘法 (“分步”): 完成任务需多个步骤, 缺一不可——“都要做”。

实际问题中两者常交织——先分类再分步 (如本例) 或先分步再分类。识别清楚“类”与“步”的结构是计数的第一步。

1.3 排列与组合

排列与组合

从 n 个不同元素中取出 k 个:

- 排列 (关心顺序): $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$;
- 组合 (不关心顺序): $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}$ 。

关系: $A_n^k = C_n^k \cdot k!$ ——排列 = 先选后排。

Chapter 2

古典概型

古典概型是所有概率的起点：所有基本事件等可能发生、事件总数有限。这两条假设使“概率”成为“数数”的问题——计数即解题。

2.1 样本空间与事件

定义 2.1: 样本空间与样本点

随机试验的全部可能结果构成的集合，称为样本空间，记为 Ω 。 Ω 中的每个元素称为样本点。 Ω 的任一子集 A 称为事件——“ A 发生” \iff “试验结果属于 A ”。

定义 2.2: 古典概型

若随机试验满足：

1. 样本空间 Ω 是有限的；
2. 每个样本点等可能发生。

称之为古典概型。事件 A 的概率

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{A \text{ 中样本点个数}}{\Omega \text{ 中样本点总数}}.$$

2.2 事件间的运算

互斥、对立、和事件、积事件

- 和事件 $A \cup B$ (也写作 $A + B$): A 或 B 至少一个发生；
- 积事件 $A \cap B$ (也写作 AB): A 与 B 同时发生；
- 互斥: $A \cap B = \emptyset$ ——不可能同时发生；

- 对立: $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \emptyset$ ——必有一个且仅有一个发生, 记 $\bar{A} = B$ 。

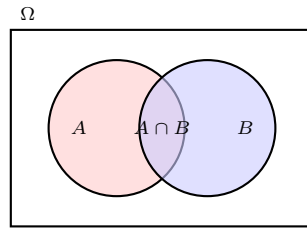
概率的加法公式

对任意事件 A, B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

若 A, B 互斥: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 。

对立事件: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ 。



注.

”至少”类问题优先考虑对立事件——如”至少有一件次品”, 其对立”全是正品”通常远比正面枚举简单。正面难算时走反面, 这是概率题的通用策略。

Chapter 3

几何概型

当样本空间无限（即样本点不可数）但均匀分布于某几何区域时，古典概型的“数数”失效。几何概型把“有利情况数”替换为“有利区域的几何度量”——长度、面积、体积。

3.1 几何概型的定义

定义 3.1: 几何概型

若样本空间 Ω 对应一个几何区域（长度 / 面积 / 体积），每个样本点均匀分布，则事件 A ($A \subseteq \Omega$) 的概率为

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

其中 μ 表示几何度量（长度 / 面积 / 体积）。

例（长度型）。

在区间 $[0, 3]$ 上随机取一点 x 。求 $x > 1$ 的概率。

解。

样本空间 $\Omega = [0, 3]$ ，长度 3；事件 $A = (1, 3]$ ，长度 2。

$$P(A) = \frac{2}{3}.$$

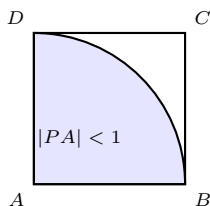
例（面积型）。

在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 内随机取一点 P 。求 $|PA| < 1$ 的概率（其中 A 为正方形的一个顶点）。

解。

$|PA| < 1$ 的区域 = 以 A 为圆心、1 为半径的圆与正方形的交集——这是一个四分之一圆（圆心在顶点，半径等于边长），面积 $\frac{\pi}{4}$ 。正方形面积 1。

$$P = \frac{\pi/4}{1} = \frac{\pi}{4}.$$



注.

”均匀分布”的重要性：几何概型的关键假设是样本点均匀地散落在区域内。若分布不均匀（如靠近某中心密度更大），上述公式失效——需用更一般的概率密度。

转化技巧：许多看似”数不清”的题目可以放到坐标平面用面积处理。例如”两人在 $[0, 1]$ 小时内随机到达，等待不超过 15 分钟”类的”会面问题”——把两人到达时间 (x, y) 看成单位正方形上一点，事件 $|x - y| \leq \frac{1}{4}$ 对应正方形中的一条带状区域，用面积比即得概率。

Part II

事件关系

Chapter 4

放回与不放回

抽取问题的两大模式：**有放回**（每次取完放回原处，下次仍可能取到该物）与**无放回**（取完不放回，下次样本库少一个）。两者的**样本空间大小不同**，但在对称性下**概率值往往相同**——这是一个微妙的直觉陷阱。

4.1 不放回抽取

不放回的样本空间

有 N 个物品，不放回地抽取 n 次，每次 1 个 ($n \leq N$):

- 有顺序：排列 $A_N^n = \frac{N!}{(N-n)!}$;
- 无顺序：组合 $C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$ 。

如何选择样本空间：

- 题目问“恰有、至少、同色”等只关心**哪些物品被取到**——用组合；
- 题目问“第一次是……第二次是……”等关心**顺序**——用排列。

例（不放回取两数）。

在 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 这 9 个数中**不放回**地取两个。记事件：

- $A =$ “取出的两个数中有且仅有一个为奇数”；
- $B =$ “取出的两个数中有且仅有一个为偶数”。

问是否有 $P(A) = P(B)$?

解.

关键观察：两次抽取共取 2 个数。“恰有一个奇数” \iff “恰有一个偶数” ($2 - 1 = 1$)。故事件 A 与 B 本身相同， $P(A) = P(B)$ 必成立。

验证数值：9 个数中奇数 4 个 ($\{1, 3, 5, 7\}$)，偶数 5 个 ($\{0, 2, 4, 6, 8\}$)。

$$P(A) = \frac{C_4^1 \cdot C_5^1}{C_9^2} = \frac{4 \cdot 5}{36} = \frac{5}{9}, \quad P(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_4^1}{C_9^2} = \frac{5 \cdot 4}{36} = \frac{5}{9}.$$

确实相等。✓

4.2 有放回抽取

有放回的样本空间

有 N 个物品，有放回地抽取 n 次，每次 1 个——每次取完放回原处。

- 样本空间大小： N^n （每次独立有 N 种选择）；
- 顺序是”内置”的——有放回时通常天然带顺序（第一次、第二次……）。

例（例 1 的有放回变形）。

把上例改为”有放回地取两次”，其它条件不变。问是否有 $P(A) = P(B)$ ？

解。

样本空间为有序对， $|\Omega| = 9^2 = 81$ 。

$A =$ ”恰有一个奇数”的样本点数：

- 第一次奇（4 种）、第二次偶（5 种）： $4 \cdot 5 = 20$ ；
- 第一次偶（5 种）、第二次奇（4 种）： $5 \cdot 4 = 20$ 。

合计 40。 $P(A) = \frac{40}{81}$ 。同理 $P(B) = \frac{40}{81}$ 。

$P(A) = P(B)$ 仍成立。✓ 原因和例 1 一样——”恰一奇”与”恰一偶”在两次抽取中逻辑等价，与是否放回无关。

注。

重要观察：若两事件本身逻辑等价 ($A = B$ 作为集合)，概率必相等——与放回方式、样本空间构造都无关，只与事件的逻辑定义有关。本题的”坑”在于题目刻意把同一事件写成两条看似不同的语句。

4.3 对比：放回 vs 不放回的典型题

例（同色球 / 至少一个）。

袋中有 7 个红球、3 个绿球。无放回地依次抽取 2 次，每次 1 个。求：

1. 取得 2 个红球的概率；

2. 取得 2 个绿球的概率;
3. 取得 2 个同色球的概率;
4. 至少取得 1 个红球的概率。

解.

共 10 个球, 不放回取 2 次 (有序) 的样本空间大小 $10 \cdot 9 = 90$ 。

(1) 两红球的顺序对数 $7 \cdot 6 = 42$ 。 $P = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$ 。

(2) 两绿球 $3 \cdot 2 = 6$ 。 $P = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$ 。

(3) 同色 = 两红或两绿 (互斥):

$$P = \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = \frac{8}{15}.$$

(4) ”至少一个红” \iff ”并非全为绿”, 对立事件为”两个都是绿球”:

$$P = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}.$$

注.

古典概型解题三步曲:

1. 刻画样本空间: 列出等可能的样本点——有序或无序要与事件描述一致;
2. 刻画事件: 数出事件对应的样本点个数;
3. 套公式: $P(A) = |A|/|\Omega|$ 。

最常见的坑——”至少”类问题: 若事件可以”又……又……”组合, 对立事件往往更简单。

Chapter 5

事件的独立性

”独立”的直观：一个事件发生与否不影响另一个事件的概率。这条直觉落实为一条乘积公式—— $P(AB) = P(A)P(B)$ 。本章学会用公式判断独立，而不是仅靠直觉。

5.1 独立性的定义与判定

定义 5.1: 两事件的相互独立

事件 A, B 称为相互独立，当且仅当

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

这一定义对称： A 独立于 $B \iff B$ 独立于 A 。

独立 \neq 互斥：别搞混

- 互斥： $A \cap B = \emptyset$ ，结果层面的不相容——”不能同时发生”；
- 独立： $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ，概率层面的互不影响——”发生与否互不干扰”。

若 $P(A), P(B) > 0$ ，互斥与独立不可兼得：互斥 $\Rightarrow P(A \cap B) = 0$ ，但独立要求 $P(A)P(B) > 0$ ——矛盾。故互斥 \Rightarrow 不独立。

多事件的乘积公式

若 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立，则对任意子集 $\{i_1, \dots, i_k\}$ ：

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}).$$

警示：两两独立 $\not\Rightarrow$ 相互独立——后者要求任何子集的乘积公式都成立。中学阶段默认”独立”为”相互独立”。

5.2 n 重独立重复试验

二项分布

同一试验重复 n 次, 每次独立、每次“成功”概率固定为 p 。则成功次数 X 服从二项分布:

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

记作 $X \sim B(n, p)$ 。

例 (二项 + 多组独立) .

A, B 是治疗同一疾病的两种药。用若干试验组进行对比——每个试验组由 4 只小白鼠组成, 其中 2 只服用 A 、2 只服用 B 。若组内“服 A 有效的白鼠数”大于“服 B 有效的白鼠数”, 称该组为甲类组。设每只小白鼠服 A 有效的概率为 $\frac{2}{3}$, 服 B 有效的概率为 $\frac{1}{2}$, 且所有白鼠的反应相互独立。

1. 求一个试验组为甲类组的概率;
2. 观察 3 个试验组, 求这 3 组中至少有一个甲类组的概率。

解.

(1) 单组甲类概率。设 X 为“组内 2 只服 A 白鼠的有效数”, Y 为“组内 2 只服 B 白鼠的有效数”。由独立性, $X \sim B(2, \frac{2}{3})$, $Y \sim B(2, \frac{1}{2})$, 且 X, Y 独立。

k	$P(X = k)$	$P(Y = k)$
0	1/9	1/4
1	4/9	1/2
2	4/9	1/4

甲类组 $\iff X > Y$ 。由 X, Y 独立:

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= P(X=1, Y=0) + P(X=2, Y=0) + P(X=2, Y=1) \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

(2) 3 组至少一个甲类。用对立事件——“3 组无甲类” = 每组都不是甲类。各组独立, 单组“不是甲类”概率 $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ 。

$$P(\text{至少一个甲类}) = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^3 = 1 - \frac{125}{729} = \frac{604}{729}.$$

5.3 独立性判定的陷阱

例 (独立性判定) .

有 6 个相同的球，分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6。有放回地随机取两次，每次取 1 个。记：

- 甲：第一次取出的球的数字是 1；
- 乙：第二次取出的球的数字是 2；
- 丙：两次取出的球的数字之和是 8；
- 丁：两次取出的球的数字之和是 7。

下列哪一对是相互独立的事件？

- (A) 甲、丙；
- (B) 甲、丁；
- (C) 乙、丙；
- (D) 丙、丁。

解.

样本空间 $|\Omega| = 6^2 = 36$ (有序对)。

单事件概率：

$$P(\text{甲}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad P(\text{乙}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$

$$P(\text{丙}) = \frac{5}{36} \left((2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) \right),$$

$$P(\text{丁}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \left((1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) \right).$$

各组交事件：

- (A) 甲、丙：甲 \cap 丙 = ”第一次 1 且和为 8” \Rightarrow 第二次 7——不可能。 $P(\text{甲} \cap \text{丙}) = 0 \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{36}$ 。不独立。
- (B) 甲、丁：甲 \cap 丁 = ”第一次 1, 第二次 6”——1 种。 $P = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(\text{甲})P(\text{丁})$ 。独立。✓
- (C) 乙、丙：乙 \cap 丙 = ”第二次 2, 第一次 6”——1 种。 $P = \frac{1}{36}$ ，而 $P(\text{乙})P(\text{丙}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{36} = \frac{5}{216}$ 。 $\frac{1}{36} = \frac{6}{216} \neq \frac{5}{216}$ 。不独立。
- (D) 丙、丁：和不能既为 8 又为 7。 $P(\text{丙} \cap \text{丁}) = 0 \neq P(\text{丙})P(\text{丁})$ 。不独立。

答：(B)。

注.

判独立的算法：别靠”看起来像”——严格走三步：

1. 算 $P(A)$ ；
2. 算 $P(B)$ ；

3. 算 $P(A \cap B)$ 并验证是否 $= P(A)P(B)$ 。

直觉陷阱: 本题中”甲”涉及第一次抽取、”乙”涉及第二次抽取, 看似独立。但”丙””丁”涉及两次结果的**和**——把两次”捏合”成一个量, 这种**聚合量**可能与单次事件产生出人意料**的关联或独立性**。判断必须看公式, 不能看描述。

Chapter 6

条件概率

”条件概率”回答：已知 B 发生， A 发生的概率是多少？它的操作是限制样本空间——把 Ω 缩至 B ，然后把原事件 A 替换为 $A \cap B$ ，重新计算比例。

6.1 条件概率的定义

定义 6.1: 条件概率

若 $P(B) > 0$ ，事件 A 在 B 发生条件下的条件概率为

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

从古典概型视角：把样本空间限定到 B ，计算 $A \cap B$ 与 B 的比——”缩小样本空间后再数”。

乘法公式

由定义变形：

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A | B) = P(A) \cdot P(B | A).$$

对三事件：

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B | A) \cdot P(C | A \cap B).$$

即按步骤分解的乘法公式——”按步骤抽取”问题的自然表述。

独立性的等价刻画

当 $P(B) > 0$ 时，

$$A, B \text{ 独立} \iff P(A | B) = P(A).$$

直观：” B 发生的信息不改变 A 的概率”——这正是”独立”的直觉说法。

例（乘法公式的步骤应用）。

袋中有 4 只红球、3 只白球，不放回地依次取 2 球。求第一次取到红球、第二次取到白球的概率。

解.

设 $A =$ “第一次取红”， $B =$ “第二次取白”。

$P(A) = \frac{4}{7}$ 。在 A 发生条件下，袋中剩 3 红 3 白，共 6 个，故 $P(B | A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 。

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{7}.$$

6.2 全概率公式

全概率公式

若 B_1, B_2, \dots, B_n 是样本空间的一个划分（两两互斥、并起来是 Ω ，每个 $P(B_i) > 0$ ），则对任意事件 A ：

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A | B_i).$$

直觉：把 A 按不同“原因” B_i 拆开，各原因导致 A 的贡献权重为 $P(B_i)$ ，条件贡献为 $P(A | B_i)$ ——加权求和即得 $P(A)$ 。

例（全概率）。

某工厂有两台机器 M_1, M_2 生产同一种零件，产量比 6 : 4。 M_1 的次品率为 3%， M_2 的次品率为 5%。任取一件产品，求其为次品的概率。

解.

设 $B_i =$ “来自 M_i ”， $A =$ “次品”。 $P(B_1) = 0.6$ ， $P(B_2) = 0.4$ ； $P(A | B_1) = 0.03$ ， $P(A | B_2) = 0.05$ 。

$$P(A) = 0.6 \cdot 0.03 + 0.4 \cdot 0.05 = 0.018 + 0.020 = 0.038.$$

即 3.8%。

注.

条件概率的三种形式：

- 定义式 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ ——由联合概率 $P(AB)$ 和边缘 $P(B)$ 求条件；
- 乘法式 $P(AB) = P(B)P(A|B)$ ——由条件概率和边缘反求联合；
- 全概率 $P(A) = \sum P(B_i)P(A|B_i)$ ——由“各原因”的贡献合成边缘。

三种形式是同一公式的三种视角：条件、联合、边缘概率之间的转换。哪个已知就用哪个——” 已知的当条件、未知的当目标” 是灵活使用的关键。

Part III

数字特征

Chapter 7

方差

方差是刻画数据离散程度的核心指标——不仅用于统计，也用于衡量随机变量的波动性。本章给出方差的两种等价形式（定义式与计算式），并示范如何通过算式恒等变形把“偏差平方和”变为“平方均值减均值平方”。

7.1 方差的定义与计算公式

定义 7.1: 样本均值与方差

设数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的均值为

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

其方差定义为

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

即“每个数与均值的偏差平方的平均”。

方差的计算公式: $S^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$

由定义展开:

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \bar{x}^2 \\ &= \overline{x^2} - 2\bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2, \end{aligned}$$

其中 $\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum x_i^2$ 是“平方的均值”， \bar{x}^2 是“均值的平方”。

口诀：方差 = 平方的均值 - 均值的平方。

例 (方差不变的约束) .

数据 x_1, x_2, \dots, x_8 的均值为 $\frac{5}{2}$ 、方差为 2。现增加一个数据 x_9 后方差仍为 2, 求 x_9 的可能取值。

解.

记号: 原均值 $\bar{x} = \frac{5}{2}$, 原方差 $S_1^2 = 2$ (故 $\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2 = 8 \cdot 2 = 16$)。设新均值 \bar{x}' 、新方差 S_2^2 。

第 1 步: 均值的变化。令 $u = x_9 - \bar{x}$ (x_9 与原均值的偏差)。新均值

$$\bar{x}' = \frac{8\bar{x} + x_9}{9} = \bar{x} + \frac{x_9 - \bar{x}}{9} = \bar{x} + \frac{u}{9}.$$

记 $\delta = \bar{x}' - \bar{x} = \frac{u}{9}$ 。

第 2 步: 分解新方差。展开 $(x_i - \bar{x}')^2 = ((x_i - \bar{x}) - \delta)^2$ 。对 $i = 1, \dots, 8$:

$$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x}')^2 = \sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2 - 2\delta \underbrace{\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})}_{=0} + 8\delta^2 = 16 + 8\delta^2.$$

(利用了偏差之和为零这一基本恒等式。)

对 $i = 9$:

$$(x_9 - \bar{x}')^2 = (u - \delta)^2 = \left(u - \frac{u}{9}\right)^2 = \left(\frac{8u}{9}\right)^2 = \frac{64u^2}{81}.$$

合并:

$$9S_2^2 = \sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x}')^2 = 16 + 8\delta^2 + \frac{64u^2}{81} = 16 + \frac{8u^2}{81} + \frac{64u^2}{81} = 16 + \frac{8u^2}{9}.$$

第 3 步: 令 $S_2^2 = 2$ 。

$$9 \cdot 2 = 16 + \frac{8u^2}{9} \implies \frac{8u^2}{9} = 2 \implies u^2 = \frac{9}{4} \implies u = \pm \frac{3}{2}.$$

故 $x_9 = \bar{x} \pm \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$, 即 $x_9 = 1$ 或 $x_9 = 4$ 。

注.

方差的两种公式各自的场景:

- 定义式 $\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$ ——用于概念理解: 方差 = 偏差平方的平均;
- 计算式 $\overline{x^2} - \bar{x}^2$ ——用于实际计算: 避免先算 \bar{x} 再逐项减法。

本题的技巧: 利用 $\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x}) = 0$ 消去交叉项, 把新方差的表达式简化为只关于 x_9 偏差 u 的二次表达——直接解方程即可。这一招凡涉及“加一个数据后均值 / 方差变化”类问题都适用。

Part IV

精选题

Chapter 8

精选题

本章汇集两道综合题，综合运用前几章方法——计数原理、对立事件、独立重复试验、二项分布。

8.1 多选题的概率（多选）

例（多选题的随机猜）。

某次数学考试的一道**多项选择题**，要求是：“在每小题给出的四个选项中，**全部选对**的得 5 分，**部分选对**的得 3 分，**有选错**的得 0 分。”已知某选择题的正确答案是 CD ，且甲、乙、丙、丁四位同学都不会做，下列表述正确的是哪些？

- (A) 甲仅随机选 1 个选项，能得 3 分的概率是 $\frac{1}{2}$ ；
- (B) 乙仅随机选 2 个选项，能得 5 分的概率是 $\frac{1}{6}$ ；
- (C) 丙随机选择选项（从非空子集中等概率选），能得分的概率是 $\frac{1}{5}$ ；
- (D) 丁随机至少选择 2 个选项，能得分的概率是 $\frac{1}{10}$ 。

解。

正确答案集 $\{C, D\}$ 。选项共 4 个，正确的 2 个、错误的 2 个。“得分” \iff 所选都在 $\{C, D\}$ 中且非空。

(A) 甲随机选 1 个，样本空间 $\{A, B, C, D\}$ 四种等可能。选中 C 或 D 即得 3 分（部分选对）——2 种。

$$P_A = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \quad \checkmark$$

(B) 乙随机选 2 个，样本空间 $C_4^2 = 6$ 种。得 5 分 \iff 选中 $\{C, D\}$ ——1 种。

$$P_B = \frac{1}{6}. \quad \checkmark$$

(C) 丙“随机选”——按通常解读，从所有**非空子集**中等概率选一个，共 $2^4 - 1 = 15$

种。”能得分” \iff 子集 $\subseteq \{C, D\}$ 且非空——即 $\{C\}, \{D\}, \{C, D\}$ 共 3 种。

$$P_C = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}. \quad \checkmark$$

(D) 丁随机”至少选 2 个”：选 2, 3, 4 个的子集共 $C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 6 + 4 + 1 = 11$ 种。
”能得分” \iff 子集 $\subseteq \{C, D\}$ 。

- 选 2 个： $\{C, D\}$ ——1 种（得 5 分）；
- 选 3 个：需 3 个都在 $\{C, D\}$ 内，但 $\{C, D\}$ 只有 2 个元素——0 种；
- 选 4 个：同理——0 种。

合计 1 种。

$$P_D = \frac{1}{11} \neq \frac{1}{10}. \quad \times$$

正确选项：(A)(B)(C)。

8.2 NBA 七场四胜制

例（恰好 5 场决出冠军）。

NBA 总决赛采用 7 场 4 胜制（谁先赢 4 场谁夺冠）。2018 年总决赛两支球队分别为勇士和骑士，假设每场比赛勇士获胜的概率为 0.6、骑士获胜的概率为 0.4，且每场比赛结果相互独立。求恰好 5 场比赛决出总冠军的概率。

解.

”恰好 5 场结束” \iff 第 5 场某方刚好取得第 4 胜，且此前 4 场该方胜 3 场、另一方胜 1 场。

情形 1：勇士以 4:1 夺冠。前 4 场勇士胜 3 场 (C_4^3 种排列)，第 5 场勇士胜：

$$P_1 = C_4^3 \cdot 0.6^3 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 4 \cdot 0.6^4 \cdot 0.4.$$

情形 2：骑士以 4:1 夺冠。前 4 场骑士胜 3 场，第 5 场骑士胜：

$$P_2 = C_4^3 \cdot 0.4^3 \cdot 0.6 \cdot 0.4 = 4 \cdot 0.4^4 \cdot 0.6.$$

两情形互斥，求和：

$$P = 4 \cdot 0.6^4 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.4^4 \cdot 0.6 = 4 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot (0.6^3 + 0.4^3).$$

计算： $0.6^3 = 0.216$ ， $0.4^3 = 0.064$ ，和为 0.28； $4 \cdot 0.6 \cdot 0.4 = 0.96$ 。

$$P = 0.96 \cdot 0.28 = 0.2688 = \frac{168}{625}.$$

注.

”恰好 n 场结束”类题目的通用套路：

1. 先固定最后一场——是某方取得”决胜手”（第 w 胜）的那一场；
2. 前 $n - 1$ 场中该方胜 $w - 1$ 场、另一方胜 $n - w$ 场——组合数给出排列方式；
3. 总冠军两队都可能——按互斥求和。

常见错误：

- 忘记最后一场必须是决胜方赢——这是”恰好”的关键约束；
- 忘记乘组合数——前 $n - 1$ 场的胜场排列方式不唯一；
- 漏掉另一队夺冠的情形——两种都是”恰好 n 场”。

8.3 综合题的破题思路

注.

概率综合题的三步诊断：

1. 辨识题型：古典概型、二项分布、条件概率、方差……；
2. 选择工具：计数原理、对立事件、乘法公式、全概率、方差计算式；
3. 构造方程 / 不等式：把题目所求用上述工具表达、求解。

常见条件反射（熟练度）：

- 见”至少” → 想对立事件；
- 见”恰好 k 次成功” → 想二项分布 + 组合数；
- 见”独立” → 想乘积公式；
- 见”不放回抽取” → 想组合 / 排列样本空间；
- 见”已知 A 发生，问 B 的概率” → 想条件概率；
- 见”平均数 + 方差” → 想 $\overline{x^2} - \bar{x}^2$ 或 $\sum(x_i - \bar{x}) = 0$ 。

这些反射是大量做题积累的——概率题的”难”往往不在计算，而在识别出正确的工具。