一元二次不等式

Zircon

Contents

Part I

一元二次不等式

Chapter 1

一元二次不等式（不含参）

一元二次不等式形如 $ax^2+bx+c>0$（或 $\geq,<,\leq$），$a\neq 0$。本章目标：掌握”**看二次函数图像 → 读不等式解集**”这一核心方法——**代数问题转化为对抛物线开口、判别式、根位置的几何判断**。

1.1 二次函数的三种表达式

二次函数的三种等价表达

同一条抛物线可以用以下三种形式描述，每种突出不同的几何信息：

- **一般式** $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）——突出系数 a,b,c；
- **顶点式** $y=a(x-h)^2+k$——突出顶点 (h,k)；
- **两根式（因式式）** $y=a(x-x_1)(x-x_2)$——突出与 x 轴的交点 x_1,x_2。

三种式子可以相互转换：

- **一般式 → 顶点式**：配方，$h=-\dfrac{b}{2a}$，$k=c-\dfrac{b^2}{4a}$；
- **一般式 → 两根式**：解方程 $ax^2+bx+c=0$，需判别式 $\Delta=b^2-4ac\geq 0$ 才有实根；
- **两根式 → 一般式**：直接展开。

判别式与根的情形

对 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$），记 $\Delta=b^2-4ac$：

- $\Delta>0$：**两不等实根** $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$，抛物线与 x 轴交于两点；
- $\Delta=0$：**两相等实根（重根）** $x=-\dfrac{b}{2a}$，抛物线与 x 轴相切；
- $\Delta<0$：**无实根**，抛物线与 x 轴不相交。

1.2 解一元二次不等式的图像法

三步诊断：

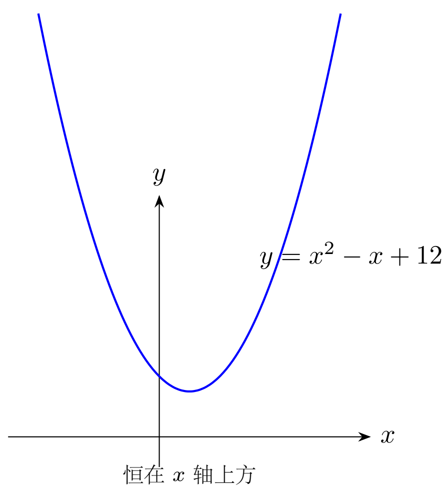
1. **看开口**：$a > 0$ 向上、$a < 0$ 向下；
2. **算** Δ：决定抛物线与 x 轴有几个交点；
3. **读图象**：$ax^2 + bx + c > 0 \iff$ 图象在 x 轴上方——”**取上**”；$< 0 \iff$ 图象在 x 轴下方——”**取下**”。

例（$\Delta < 0$ 的情形）.

> 解不等式 $x^2 - x + 12 > 0$。

解.

> $a = 1 > 0$（开口向上），$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1 - 48 = -47 < 0$——**无实根**。
> 抛物线开口向上、且始终在 x 轴上方——y **恒正**。故不等式 $y > 0$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 成立。
> **解集**：$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$。



例（两根式直接读解）.

> 解不等式 $(x + 4)(x - 3) > 0$。

解.

> 左边已是**两根式**——两根 $x_1 = -4, x_2 = 3$，$a = 1 > 0$（展开后 $x^2 + x - 12$，系数为正）。
> 开口向上、两根为 $-4, 3$：图象在 x 轴上方 $\iff$ $x < -4$ 或 $x > 3$。
> **解集**：$(-\infty, -4) \cup (3, +\infty)$。
> **口诀**：” **大于取两边、小于取中间**”（针对开口向上的情形）。

例（$\Delta = 0$ 的情形）.

解不等式 $(x-7)^2 > 0$。

解.

$(x-7)^2 \geq 0$ 恒成立，且 $= 0 \iff x = 7$。故 $(x-7)^2 > 0 \iff x \neq 7$。

解集：$\{x \mid x \neq 7\} = (-\infty, 7) \cup (7, +\infty)$。

从抛物线视角：$y = (x-7)^2$ 开口向上、与 x 轴**相切**于 $x = 7$——除切点外 $y > 0$。

注.

九种组合一览表——按 a 正负与 Δ 三档交叉：

	$\Delta > 0$ (两根 $x_1 < x_2$)	$\Delta = 0$ (重根 x_0)	$\Delta < 0$
$a > 0$，$y > 0$	$x < x_1$ 或 $x > x_2$	$x \neq x_0$	$\mathbb{R}$
$a > 0$，$y < 0$	$x_1 < x < x_2$	$\varnothing$	$\varnothing$
$a > 0$，$y \geq 0$	$x \leq x_1$ 或 $x \geq x_2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

$a < 0$ 时把不等式两侧同乘 -1（**注意方向翻转**）转化为 $a > 0$ 再查表。

Part II

高次不等式

Chapter 2

高次不等式的穿根法

当不等式形如 $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) > 0$（或 < 0）时，**穿根法**（也叫符号法、数轴标根法）能在**一个数轴上**快速读出解集——比逐段讨论要省力得多。

2.1 二次不等式的因式分解

例（首项系数非 1 的情形）.

> 解不等式 $12x^2 + x - 1 > 0$。

解.

方法一：直接因式分解。对 $12x^2 + x - 1$，寻找两个整数 p, q 使 $pq = 12 \cdot (-1) = -12$ 且 $p + q = 1$——得 $p = 4, q = -3$：

$$12x^2 + x - 1 = 12x^2 + 4x - 3x - 1 = 4x(3x+1) - (3x+1) = (3x+1)(4x-1).$$

两根 $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{4}$，$a = 12 > 0$。" 大于取两边"：

$$\text{解集} = \left(-\infty, -\tfrac{1}{3}\right) \cup \left(\tfrac{1}{4}, +\infty\right).$$

方法二：系数逆写 / 换元法。令 $t = \frac{1}{x}$（$x \neq 0$），则

$$12x^2 + x - 1 > 0 \iff \frac{12}{t^2} + \frac{1}{t} - 1 > 0 \iff \frac{12 + t - t^2}{t^2} > 0.$$

$t^2 > 0$（只要 $t \neq 0$）故等价于 $-t^2 + t + 12 > 0 \iff t^2 - t - 12 < 0 \iff (t-4)(t+3) < 0 \iff -3 < t < 4$。回代 $t = 1/x$：

- 若 $x > 0$：$\frac{1}{x} < 4 \iff x > \frac{1}{4}$；
- 若 $x < 0$：$\frac{1}{x} > -3 \iff -3x < 1 \iff x > -\frac{1}{3}$，合并得 $-\frac{1}{3} < x < 0$；结合 $x < 0$ 得 $x < -\frac{1}{3}$ 的补集——要再小心反向处理。

（这里直接因式分解显然更快。）

注.

系数逆写法的思想：**把大系数"换 $t = 1/x$ "变成小系数**。适用场合：

- 首项系数绝对值很大、常数项绝对值较小；
- 两根式形式 $(ax+b)(cx+d)$ 难直接看出的情形。

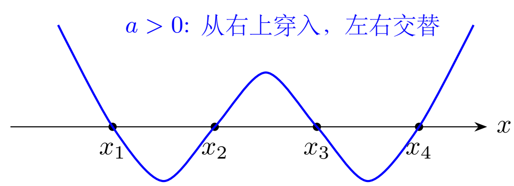
但若**能直接十字相乘**就不必绕——方法二只是思想拓展，实际解题以方法一为主。

2.2 穿根法

穿根法（数轴标根法）

设 $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$，$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$（**所有根都化为 $x - x_i$ 的形式**，即每个因式的 x 系数为正）。则：

1. 将 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 由小到大**标在数轴上**；
2. 从最右侧开始：$a > 0$ 则从**右上方**穿入，$a < 0$ 则从**右下方**穿入；
3. **奇次重根穿过、偶次重根不穿过**（到根处反弹回去）；
4. 图象在 x 轴**上方** $\iff$ $f(x) > 0$、**下方** $\iff$ $f(x) < 0$——按需读解集。

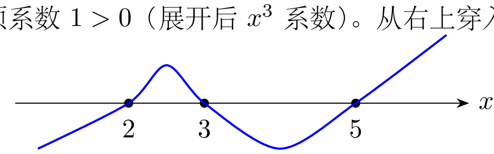


例（三个单根）.

解不等式 $(x-2)(x-3)(x-5) > 0$。

解.

三个单根 $2, 3, 5$，首项系数 $1 > 0$（展开后 x^3 系数）。从右上穿入、奇穿：



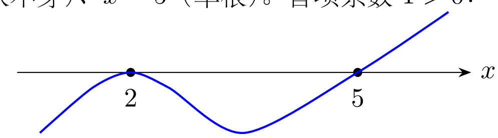
曲线在 x 轴**上方**的区间：$(2,3)$ 与 $(5,+\infty)$。
解集：$(2,3) \cup (5,+\infty)$。

例（含偶次重根）.

解不等式 $(x-2)^2(x-5)>0$。

解.

根 $x=2$（二重，偶次不穿）、$x=5$（单根）。首项系数 $1>0$：



$x=2$ 处”**反弹**”（不穿过）——两侧同号（均在 x 轴下方）。
曲线在 x 轴上方的区间：$(5,+\infty)$。注意 $x=2$ 时 $y=0$ **不满足严格不等式**。
解集：$(5,+\infty)$。

例（首项系数为负）.

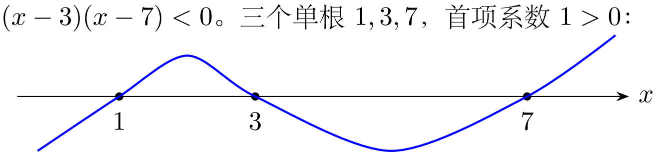
解不等式 $(1-x)(x-3)(x-7)>0$。

解.

先**统一每个因式 x 的系数为正**：$(1-x)=-(x-1)$，故

$$(1-x)(x-3)(x-7)=-(x-1)(x-3)(x-7).$$

等价于 $(x-1)(x-3)(x-7)<0$。三个单根 $1,3,7$，首项系数 $1>0$：



曲线在 x 轴**下方**的区间：$(-\infty,1)$ 与 $(3,7)$。
解集：$(-\infty,1)\cup(3,7)$。

注.

穿根法使用前的预处理三件事：

1. **移项**：不等式一侧化为 0；
2. **因式分解**：把多项式写成 $a(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\cdots$ 的**标准形式**——每个因式 x 的系数为 $+1$，否则需把负号提出来**翻转不等号方向**；
3. **判 a 正负**：决定从右上还是右下穿入（$a>0$ 右上、$a<0$ 右下）。

奇穿偶不穿口诀：**重根次数为奇 → 曲线穿过 x 轴；为偶 → 曲线切到 x 轴后弹回去（两侧同号）**。这条是穿根法的灵魂——因为因式 $(x-x_0)^k$ 在 x_0 左右的符号取决于 k 的奇偶。

Part III

分式不等式

Chapter 3

分式不等式

分式不等式含未知数于分母。核心思路：**转化成多项式不等式**——但要留神两件事：

1. **分母** $\neq 0$（禁止取值）；
2. **不能直接" 两边乘分母"**——因为分母正负未知，乘了之后不等号方向不定。

正确的变形是**利用同号 / 异号**：$\frac{f}{g} > 0 \iff fg > 0$（且 $g \neq 0$），$\frac{f}{g} < 0 \iff fg < 0$。

3.1 分式不等式 → 多项式不等式

分式不等式的等价变形

对 $g(x) \neq 0$：

- $\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \iff f(x)g(x) > 0$；
- $\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \iff f(x)g(x) < 0$；
- $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \iff f(x)g(x) \geq 0$ 且 $g(x) \neq 0$；
- $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \iff f(x)g(x) \leq 0$ 且 $g(x) \neq 0$。

含等号时必须额外排除 $g = 0$——否则得 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\neq 0}{0}$，无意义。

例（严格不等式）.

> 解不等式 $\frac{x-1}{x+1} < 0$。

解.

> 等价于 $(x-1)(x+1) < 0$ 且 $x+1 \neq 0$（**严格不等式自动包含** $x+1 \neq 0$，因为 $(x+1)(x-1) < 0 \Rightarrow x+1 \neq 0$）。

$(x+1)(x-1)<0$：两根 $-1,1$，开口向上，”小于取中间”——$-1<x<1$。
解集：$(-1,1)$。

例（含等号）．

解不等式 $\dfrac{x+3}{x-2}\le 0$。

解.

等价于 $(x+3)(x-2)\le 0$ 且 $x-2\neq 0$。
$(x+3)(x-2)\le 0$：两根 $-3,2$，”小于等于取中间”——$-3\le x\le 2$。再去掉 $x=2$：
解集：$[-3,2)$。
关键：等号那一侧只对**分子为零**成立（$x=-3$ 时分子 0，分式值为 0 满足 ≤ 0）；分母为零（$x=2$）**绝对不能取**。

例（需要先通分）．

解不等式 $\dfrac{x-5}{x+4}\ge 1$。

解.

不能直接两边乘 $x+4$（因符号未知）。先**移项通分使一侧为零**：

$$\frac{x-5}{x+4}-1\ge 0 \iff \frac{x-5-(x+4)}{x+4}\ge 0 \iff \frac{-9}{x+4}\ge 0.$$

分子 $-9<0$ 为**常数**，故 $\dfrac{-9}{x+4}\ge 0 \iff x+4<0$（分母为负才能让负除以负为正；$x+4$ 不能为零）。
解集：$(-\infty,-4)$。
验证：取 $x=-5$，原式 $\frac{-5-5}{-5+4}=\frac{-10}{-1}=10\ge 1$ ✓。取 $x=0$（不在解集），原式 $\frac{-5}{4}=-1.25<1$——确实不满足。

注.

分式不等式通用步骤：

1. **移项通分**：使不等式一侧为 0、另一侧为**单个分式**；
2. **”消去分母”**：$\dfrac{f}{g}$ 与 $g\neq 0$ 条件下的 fg **同号**——把分式不等式换成多项式不等式（含等号时保留 $g\neq 0$）；
3. **解多项式不等式**：用图像法或穿根法。

最易错处：**直接两边乘分母**——这是错的，因为分母正负未知，相当于”乘以未知符号的数”，不等号方向不定。**必须先通分再化简**。