空间直角坐标系

Zircon

Contents

Part I

向量基础

Chapter 1

平面向量基础复习

高中阶段的空间几何计算以**向量法**为主。为了顺利过渡到空间，必须先把**平面向量**的几条核心结论回忆清楚——**共线、基本定理、点乘、模长、夹角、平行、垂直**。这些结论在空间中只需**升一维**即可直接使用。

1.1 向量的坐标与共线

平面向量坐标

平面向量 $\vec{a}=(x,y)$ 表示 $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$，其中 $\vec{i},\vec{j}$ 是**标准基**。
两向量共线判据（平行 $\vec{a}\parallel\vec{b}$）:

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\iff\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \vec{b}=\lambda\vec{a}\iff x_1y_2-x_2y_1=0.$$

三点共线与 $\lambda+\mu=1$

设 A,B,C 为平面上三个点，O 为任意参考点。若

$$\vec{OC}=\lambda\vec{OA}+\mu\vec{OB},$$

则

$$\boxed{A,B,C\text{ 三点共线}\iff\lambda+\mu=1.}$$

证：三点共线 $\iff$ $\vec{AC}=t\vec{AB}$，即 $\vec{OC}-\vec{OA}=t(\vec{OB}-\vec{OA})$，整理得 $\vec{OC}=(1-t)\vec{OA}+t\vec{OB}$，系数和为 1。

1.2 平面向量基本定理

平面向量基本定理

若 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 为**不共线**的两个向量（即平面上的一组基），则平面内**任意**向量 $\vec{a}$ 都能**唯一**表示成

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2.$$

注.

> 注意：**非共线**是关键——共线的两个向量只能张成一条直线，而非整个平面。

1.3 数量积（点乘）

点乘的几何定义

两向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 夹角为 θ，则

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta.}$$

几何意义：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underbrace{|\vec{a}| \cos\theta}_{\vec{a}\text{ 在}\vec{b}\text{ 方向上的投影}} \times |\vec{b}|.$$

即 ” **投影** $\times$ **模长**”。当 $\vec{b}$ 为单位向量 $\hat{\vec{b}}$ 时，$\vec{a} \cdot \hat{\vec{b}}$ 就是 $\vec{a}$ 在 $\hat{\vec{b}}$ 方向上的**投影长度**。

点乘的坐标形式

若 $\vec{a} = (x_1, y_1)$，$\vec{b} = (x_2, y_2)$，则

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2.}$$

1.4 模长、夹角、平行、垂直

模长

$\vec{a} = (x, y) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$。特别地 $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$。

夹角公式

$\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角 θ 满足

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

平行与垂直判据

- **平行**（$\vec{a} \parallel \vec{b}$） $\iff$ $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$;
- **垂直**（$\vec{a} \perp \vec{b}$） $\iff$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ $\iff$ $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$。

1.5 升维：从平面到空间

注.

以上所有结论在空间中只需加一维即可使用：

- 向量 $\vec{a} = (x, y, z)$;
- 点乘 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$;
- 模长 $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
- 垂直判据 $\vec{a} \perp \vec{b}$ $\iff$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;
- 夹角 $\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$。

唯一的新概念：空间向量的**平行**不再由”叉积”单条件判定，而需 $\exists\lambda$ 使 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$（坐标对应成比例）。

Chapter 2

空间直角坐标系与空间向量

2.1 空间向量基本定理

空间向量基本定理

若 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 为**不共面**的三个向量（即一组空间基），则空间内**任意**向量 $\vec{a}$ 都能**唯一**表示成

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3.$$

注.

> **”不共面”** 是空间版本关键条件——三条向量构成一个**三维骨架**；若共面则只能张成一个二维子空间。

2.2 四点共面推论

四点共面的 $\lambda + \mu + \nu = 1$ 推论

设 A, B, C, D 为空间四点，O 为任意参考点。若

$$\vec{OD} = \lambda\vec{OA} + \mu\vec{OB} + \nu\vec{OC},$$

则

$$\boxed{A, B, C, D \text{ 四点共面} \iff \lambda + \mu + \nu = 1.}$$

证：四点共面 $\iff$ $\vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AC}$ 共面 $\iff$ $\exists s, t$ 使 $\vec{AD} = s\vec{AB} + t\vec{AC}$。化到 O 参考系：$\vec{OD} = (1-s-t)\vec{OA} + s\vec{OB} + t\vec{OC}$，三系数之和为 1。

注.

> 这是**平面版本 $\lambda + \mu = 1$ 的直接升维**——从”三点共线”升级到”四点共面”。

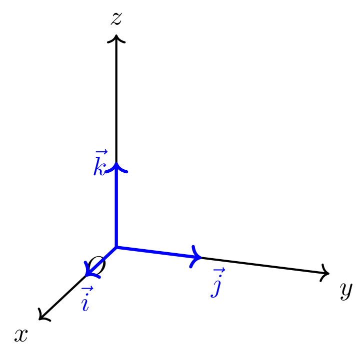
2.3 空间直角坐标系：右手系

右手直角坐标系

取空间中互相**两两垂直**的三条数轴 x, y, z，原点 O 公共，方向满足**右手法则**：**右手四指从 x 轴弯向 y 轴，大拇指指向 z 轴正方向**。
空间中任一点 P 都能**唯**一对应一个坐标三元组 (x_P, y_P, z_P)。
标准基：

$$\vec{i} = (1,0,0), \quad \vec{j} = (0,1,0), \quad \vec{k} = (0,0,1).$$

三者两两垂直、模长均为 1。



2.4 向量的坐标与两点向量

空间向量坐标

空间向量 $\vec{a}$ 按标准基展开 $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$，记 $\vec{a} = (x, y, z)$。
坐标运算：

- 加法 $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2)$；
- 数乘 $\lambda\vec{a} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$；
- 点乘 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$；
- 模长 $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$；
- 夹角 $\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$。

两点间向量坐标

设 $A = (x_A, y_A, z_A)$，$B = (x_B, y_B, z_B)$，则

$$\vec{AB} = B - A = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A).$$

两点距离：

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

2.5 方向单位向量

方向向量的单位化

任意非零向量 $\vec{a} = (x, y, z)$ 对应的**单位方向向量**

$$\hat{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right).$$

用途：

- 表达方向而不关心长度；
- 用于**投影**——若要把 $\vec{b}$ 投影到 $\vec{a}$ 方向上，投影长度为 $\vec{b} \cdot \hat{\vec{a}}$；
- 表达平面法向——求出法向量后再单位化，便于后续**距离**计算。

例（坐标化建模流程）.

以下是解**空间几何**题的通用步骤：

1. **选原点**：通常取**垂直关系最集中**的顶点（如正方体角点、$PA \perp$ 底面的 A 点）；
2. **建三轴**：沿题目中天然的垂直棱建 x, y, z 轴（右手系）；
3. **写出关键点坐标**：所有顶点都用 (x, y, z) 表示；
4. **用向量做题**：证明/计算都转化为向量运算。

注.

什么时候适合建系?

- 题目有**明显的三条两两垂直的边**（正方体、直棱柱 + 底面正多边形、$PA \perp$ 底面）；
- 若**没有现成的垂直关系**，就要先用**综合法**证出来一组垂直（如”面 $ABCD$ 的中心 O，$PO \perp$ 底”）再建系；
- **强行建不合适的系**会让坐标中出现大量根号，反而失去优势。

Chapter 3

法向量及其应用

法向量是坐标法解决空间几何的**核心工具**——求距离、线面角、面面角、证明线面垂直 / 面面平行，全都要先**把法向量求出来**。本章先给出”线面垂直原理”（通法）和”叉乘快捷法”，再给出法向量的**三大应用**。

3.1 法向量的定义

平面的法向量

若向量 $\vec{n}$ 与平面 α 内的**任意**向量都**垂直**，则称 $\vec{n}$ 是 α 的**法向量**。
性质：

- 法向量不唯一——任何 $\lambda\vec{n}$ $(\lambda \neq 0)$ 也是法向量；
- 给定平面，法向量的方向只有**两种**（互为反向），坐标法中**取哪一支都可以**，但最终算**夹角**时要注意**取绝对值**或修正符号。

3.2 法向量求法一：线面垂直原理（通法）

解方程组求法向量

设平面 α 内两条**不共线**的向量 $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$，$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$。要求 $\vec{n} = (x, y, z)$ 垂直于 α，由**线面垂直原理**：

$$\vec{n} \perp \alpha \iff \vec{n} \perp \vec{u} \text{ 且} \vec{n} \perp \vec{v}.$$

写成方程组：

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = u_1x + u_2y + u_3z = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = v_1x + v_2y + v_3z = 0. \end{cases}$$

两个方程、三个未知数——解出含**一个自由参数**的解，取一个简洁的具体值（常取 $z = 1$ 或让系数全部为整数）即为一个法向量。

例（通法求法向量举例）.

设平面内两条向量 $\vec{u} = (1, 0, 1)$，$\vec{v} = (1, 1, 0)$。求一个法向量。

解.

设 $\vec{n} = (x, y, z)$。由 $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0, \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$：

$$\begin{cases} x + z = 0, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

取 $x = 1$，得 $y = -1$，$z = -1$。即 $\vec{n} = (1, -1, -1)$。

3.3 法向量求法二：叉乘快捷法

叉乘（外积）公式

对两个向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$，定义它们的**叉乘**

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1).}$$

记忆技巧——用行列式：

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

核心性质：

- $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ 且 $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$——即 $\vec{a} \times \vec{b}$ **同时垂直**于 $\vec{a}, \vec{b}$；
- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$（反对易）；
- 方向由**右手法则**决定（从 $\vec{a}$ 到 $\vec{b}$ 四指弯曲，拇指方向即 $\vec{a} \times \vec{b}$）。

用叉乘求法向量

取平面 α 内两条**不共线**向量 $\vec{u}, \vec{v}$，则

$$\boxed{\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}}$$

即是 α 的一个法向量。
优势：相比解方程组，**一步到位**——直接代公式。

例（叉乘法对照通法）.

同上例，$\vec{u} = (1, 0, 1)$，$\vec{v} = (1, 1, 0)$，用叉乘求法向量。

解.

$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=(0\cdot 0-1\cdot 1,\ 1\cdot 1-1\cdot 0,\ 1\cdot 1-0\cdot 1)=(-1,1,1)$。

与通法结果 $(1,-1,-1)$ **互为反向**——没有矛盾（法向量模长和方向都不唯一）。

3.4 法向量的三大应用

应用一：点到平面的距离

设 P 为空间内一点，α 为一个平面，$A\in\alpha$，$\vec{n}$ 是 α 的法向量。则

$$\boxed{d(P,\alpha)=\frac{|\vec{AP}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}.}$$

几何意义：$\vec{AP}$ 在 $\vec{n}$ 方向的**投影绝对值**即点到平面的距离——因为 $\vec{n}$ 垂直于 α，$\vec{AP}$ 沿法向的分量就是 P 距离 α 的**垂直高度**。

应用二：面面角（二面角）

设两个半平面（或平面）的法向量分别为 $\vec{n}_1,\vec{n}_2$，两平面夹角（二面角）θ：

$$\cos\theta=\pm\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}.$$

正负号要根据具体情形判断：

- 若两个法向量**指向二面角的同一侧**——则 $\cos\theta$ 与 $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2/(|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|)$ **异号**；
- 反之（指向**两侧**）则**同号**。

实战中可以**先算出绝对值**，再**看图判断锐角或钝角**，给答案加符号。

应用三：线面角

设直线 ℓ 的方向向量 $\vec{d}$，平面 α 的法向量 $\vec{n}$，ℓ 与 α 的**线面角** φ（ℓ 与其在 α 内投影的夹角）满足

$$\boxed{\sin\varphi=\frac{|\vec{d}\cdot\vec{n}|}{|\vec{d}|\,|\vec{n}|}.}$$

特别警告——是 $\sin$ 不是 $\cos$！——这是线面角与面面角**最容易混**的地方：

- **面面角**：两个法向量的夹角 $\Rightarrow\cos$；
- **线面角**：方向向量 $\vec{d}$ 与**法向量** $\vec{n}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}-\varphi$（互余），所以 $\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)=\sin\varphi$。

注.

线面角 vs. 面面角 vs. 异面直线角——速记：

- **异面直线角**（两条直线的夹角）：$\cos = \dfrac{|\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2|}{|\vec{d}_1|\,|\vec{d}_2|}$——方向向量的夹角**取锐角**；
- **线面角**：$\sin = \dfrac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}|\,|\vec{n}|}$——方向向量与**法向量**的夹角的**余角**；
- **面面角**：$\cos\theta = \pm\dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$——两**法向量**的夹角**或其补角**。

  检验：算完后看图估计锐钝，给一个几何答案。

注.

建系 → 法向量 → 应用三步法是高中空间几何的**标准流程**：

1. 根据垂直关系**建右手系**、写出关键点坐标；
2. 在要求的平面内**取两条不共线向量**，用**解方程**或**叉乘**求法向量；
3. 代入**距离公式 / 面面角公式 / 线面角公式**。

后续两章的例题都将严格按这个流程解答。

Part II

精选题

Chapter 4

基础篇

本章 4 道题属于**坐标法入门**——垂直关系现成，直接建系写坐标即可。重点是熟悉流程：**建系 → 写点 → 向量运算 → 公式**。

4.1 基础 1：菱形侧面 + 等腰直角底面

例（菱形侧面 ⊥ 底面）.

已知菱形 $BDEF$ 与 $\triangle ABC$ 所在平面互相垂直，$\angle FBD = 60°$，$AB \perp BC$，$AB = BC = \sqrt{2}$，D 是 AC 的中点，M 是 BE 的中点。求：

(1) 求证：$BE \perp$ 平面 ACM；

(2) 求二面角 A-EF-C 的余弦值。

解.

建系：$AB = BC = \sqrt{2}$ 且 $AB \perp BC \Rightarrow \triangle ABC$ 是等腰直角，斜边 $AC = 2$；D 是斜边中点，故 $BD \perp AC$、$|BD| = 1$。取 D 为原点，y 轴沿 DC，x 轴沿 DB，z 轴竖直。菱形 $BDEF \perp$ 底面 $\Rightarrow BDEF$ 在 xz 平面内。

坐标：

$$A = (0, -1, 0),\ B = (1, 0, 0),\ C = (0, 1, 0),\ D = (0, 0, 0).$$

菱形 $BDEF$ 所有边长 $= |BD| = 1$。$\angle FBD = 60°$（在 xz 平面内）：

$$F = \left(\tfrac{1}{2},\ 0,\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ E = \left(-\tfrac{1}{2},\ 0,\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ M = \left(\tfrac{1}{4},\ 0,\ \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

(1)

$$\vec{BE} = \left(-\tfrac{3}{2},\ 0,\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \vec{AM} = \left(\tfrac{1}{4},\ 1,\ \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right),\ \vec{CM} = \left(\tfrac{1}{4},\ -1,\ \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

$\vec{BE} \cdot \vec{AM} = -\frac{3}{8} + 0 + \frac{3}{8} = 0$；$\vec{BE} \cdot \vec{CM} = -\frac{3}{8} + 0 + \frac{3}{8} = 0$。

故 $BE \perp AM$ 且 $BE \perp CM$，AM, CM 不共线 $\Rightarrow BE \perp$ 平面 ACM。■

(2) EF 沿 x 轴，中点 $P=(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2})$：

$$\vec{PA}=\left(0,-1,-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \vec{PC}=\left(0,1,-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

两向量 x 分量均为 0（$\perp EF$），故二面角即其夹角：

$$\cos\theta=\frac{\vec{PA}\cdot\vec{PC}}{|\vec{PA}|\,|\vec{PC}|}=\frac{-1+3/4}{\sqrt{7/4}\cdot\sqrt{7/4}}=\frac{-1/4}{7/4}=-\frac{1}{7}.$$

二面角 A-EF-C 的余弦值为 $\boxed{-\frac{1}{7}}$（钝角）。

4.2 基础 2：正三棱柱的平行与垂直

例（各棱长相等的三棱柱）.

已知三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 所有棱长均为 2，侧面 $BCC_1B_1\perp$ 底面 ABC，$\angle B_1BC=60^\circ$，M,N 分别为 BC,A_1C_1 的中点。

(1) 求证：$MN\parallel$ 平面 ABB_1A_1；

(2) 设 P 在 A_1C_1 上，平面 $B_1CP\perp$ 平面 ACC_1A_1，求 $\dfrac{C_1P}{PA_1}$。

解.

建系：底面是边长 2 的正三角形。取 B 为原点，x 沿 BC，y 沿垂直 BC 指向 A，z 竖直向上。$\angle B_1BC=60^\circ$ 且 BB_1 在 xz 平面（侧面 $\perp$ 底）：

$$B=(0,0,0),\ C=(2,0,0),\ A=(1,\sqrt{3},0),$$

$$B_1=(1,0,\sqrt{3}),\ C_1=(3,0,\sqrt{3}),\ A_1=(2,\sqrt{3},\sqrt{3}).$$

$M=(1,0,0)$，$N=\left(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$。

(1) 平面 ABB_1A_1 的法向量 $\vec{n}$：$\vec{BA}=(1,\sqrt{3},0)$，$\vec{BB_1}=(1,0,\sqrt{3})$。

$$\vec{n}=\vec{BA}\times\vec{BB_1}=(3,-\sqrt{3},-\sqrt{3}).$$

$\vec{MN}=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$，$\vec{MN}\cdot\vec{n}=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}-3=0$。

又 $\vec{BM}\cdot\vec{n}=3\neq 0\Rightarrow M\notin$ 平面 ABB_1A_1。故 $MN\parallel$ 平面 ABB_1A_1。■

(2) 设 $P=A_1+t(C_1-A_1)=\big(2+t,\ \sqrt{3}(1-t),\ \sqrt{3}\big)$，$t\in[0,1]$。

$\vec{B_1C}=(1,0,-\sqrt{3})$，$\vec{B_1P}=(1+t,\ \sqrt{3}(1-t),\ 0)$，

$$\vec{n}_1=\vec{B_1C}\times\vec{B_1P}=\Big(3(1-t),\ -\sqrt{3}(1+t),\ \sqrt{3}(1-t)\Big).$$

$\vec{AC}=(1,-\sqrt{3},0)$，$\vec{AA_1}=(1,0,\sqrt{3})$，

$$\vec{n}_2=\vec{AC}\times\vec{AA_1}=(-3,-\sqrt{3},\sqrt{3}).$$

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -9(1-t) + 3(1+t) + 3(1-t) = -3 + 9t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$。

故 $A_1P : PC_1 = 1:2$，即 $\boxed{\dfrac{C_1P}{PA_1} = 2}$。

4.3 基础 3：空间向量求两直线夹角

例（正三棱柱内的异面直线角）.

正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 底面边长为 1，侧棱长为 2。E, F 分别为 AB, AC 的三等分点（$AE = \frac{1}{3}AB$，$AF = \frac{1}{3}AC$）。求直线 B_1E 与直线 EF 所成角的正弦值。

解.

建系：A 为原点，x 轴沿 AB，z 轴竖直：

$$A = (0,0,0),\ B = (1,0,0),\ C = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0),\ B_1 = (1,0,2).$$

$$E = \tfrac{1}{3}\vec{AB} = (\tfrac{1}{3}, 0, 0),\ F = \tfrac{1}{3}\vec{AC} = (\tfrac{1}{6}, \tfrac{\sqrt{3}}{6}, 0).$$

$$\vec{B_1E} = (-\tfrac{2}{3}, 0, -2),\ |\vec{B_1E}| = \sqrt{\tfrac{4}{9} + 4} = \tfrac{2\sqrt{10}}{3}.$$

$$\vec{EF} = (-\tfrac{1}{6}, \tfrac{\sqrt{3}}{6}, 0),\ |\vec{EF}| = \tfrac{1}{3}.$$

$$\vec{B_1E} \cdot \vec{EF} = \tfrac{1}{9} + 0 + 0 = \tfrac{1}{9}.$$

$$\cos\theta = \frac{1/9}{(2\sqrt{10}/3)(1/3)} = \frac{1}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{20}.$$

故 $\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{10}{400}} = \sqrt{\frac{390}{400}} = \dfrac{\sqrt{390}}{20}$。

4.4 基础 4：四棱锥中的线面角

例（四棱锥中线面角的求解）.

四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$PA \perp$ 底面 $ABCD$，底面是边长为 2 的正方形，$PA = 2$。M 是棱 PC 的中点。求直线 BM 与平面 PAC 所成角的正弦值。

解.

建系：A 为原点，x 轴沿 AB，y 轴沿 AD，z 轴沿 AP。

$$A = (0,0,0),\ B = (2,0,0),\ C = (2,2,0),\ D = (0,2,0),\ P = (0,0,2).$$

M 是 PC 中点，$M = (1,1,1)$。$\vec{BM} = (-1,1,1)$，$|\vec{BM}| = \sqrt{3}$。

平面 PAC 的法向量：PA 沿 z 轴，$AC = (2,2,0)$——故平面 PAC 含 z 轴和 $\vec{AC}$。取 $\vec{n} = \vec{AC} \times \vec{AP} = (2,2,0) \times (0,0,2) = (4,-4,0)$，取 $\vec{n} = (1,-1,0)$，$|\vec{n}| = \sqrt{2}$。

$$\vec{BM} \cdot \vec{n} = -1 - 1 + 0 = -2.$$

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{BM} \cdot \vec{n}|}{|\vec{BM}|\,|\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

故 BM 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$。

注.

本章小结：四道题都是**建系 → 写坐标 → 法向量 → 公式**的直接套路。**关键是坐标写对**——尤其是”侧面 ⊥ 底面”或”折叠”类题目，一旦坐标错，后面全错。建议：每写完坐标，**用已知的距离或角度验证 2-3 个**再继续。

Chapter 5

提高篇

本章在基础篇之上加入**两类难点**：(1) 求某个参数（棱段比、线段长）使某个**几何条件**成立；(2) **折叠**后的坐标重建。套路仍然是" 建系 + 法向量"，但**参数化**要更细致。

5.1 提高 1：菱形 + 竖立矩形的面面角

例（菱形底 + 矩形侧面）.

> 如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 4，$\angle DAB = 60°$。矩形 $BDFE$ 与底面 $ABCD$ 垂直，且面积为 8。
>
> (1) 求证：$AC \perp BE$；
>
> (2) 求二面角 E-AF-D 的余弦值。

解.

准备：$\angle DAB = 60°$、边长 $4 \Rightarrow \triangle ABD$ 为等边，$BD = 4$。对角线 $AC = 2{\cdot}4\cos 30° = 4\sqrt{3}$。矩形 $BDFE$ 面积 $= |BD| \cdot |BE| = 4|BE| = 8 \Rightarrow |BE| = 2$。

建系：取菱形对角线交点 O 为原点，x 沿 $OA \to OC$ 方向，y 沿 $OB \to OD$ 方向，z 竖直。

$$A = (-2\sqrt{3}, 0, 0),\ B = (0, -2, 0),\ C = (2\sqrt{3}, 0, 0),\ D = (0, 2, 0).$$

矩形 $BDFE$ 在 yz 平面内（$\perp$ 底面且含 BD），$BE \perp BD$、$|BE| = 2$：

$$E = (0, -2, 2),\ F = (0, 2, 2).$$

(1) $\vec{AC} = (4\sqrt{3}, 0, 0)$，$\vec{BE} = (0, 0, 2)$。$\vec{AC} \cdot \vec{BE} = 0 \Rightarrow AC \perp BE$。■

(2) 平面 EAF：$\vec{AE} = (2\sqrt{3}, -2, 2)$，$\vec{AF} = (2\sqrt{3}, 2, 2)$。

$$\vec{n}_1 = \vec{AE} \times \vec{AF} = (-4-4,\ 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3},\ 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}) = (-8, 0, 8\sqrt{3}).$$

取简化 $\vec{n}_1 = (-1, 0, \sqrt{3})$，$|\vec{n}_1| = 2$。

平面 DAF：$\vec{AD}=(2\sqrt{3},2,0)$，$\vec{AF}=(2\sqrt{3},2,2)$。

$$\vec{n}_2=\vec{AD}\times\vec{AF}=(4-0,\ 0-4\sqrt{3},\ 4\sqrt{3}-4\sqrt{3})=(4,-4\sqrt{3},0).$$

取简化 $\vec{n}_2=(1,-\sqrt{3},0)$，$|\vec{n}_2|=2$。

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=-1+0+0=-1.$$

$$\cos\theta=\frac{-1}{2\cdot 2}=-\frac{1}{4}.$$

故二面角 E-AF-D 的余弦值为 $\boxed{-\frac{1}{4}}$（钝角）。

5.2 提高 2：参数化求位置使面面角指定

例（参数化的面面角问题）.

四棱锥 P-$ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AD\parallel BC$，$AD\perp CD$，$AD=CD=2\sqrt{2}$，$BC=4\sqrt{2}$，$PA=2$。M 在 PD 上，记 $\dfrac{PM}{PD}=t$。求 t，使二面角 M-AC-D 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

解.

建系：A 为原点，x 轴沿 CD 方向（A 到 CD 的平行线），y 轴沿 AD，z 轴沿 AP。

$$A=(0,0,0),\ D=(0,2\sqrt{2},0),\ C=(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0),\ P=(0,0,2).$$

$M=P+t(D-P)=(0,\ 2\sqrt{2}\,t,\ 2-2t)$。

二面角 M-AC-D 沿边 AC。$\vec{AC}=(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$，$|\vec{AC}|^2=16$。

$\vec{AM}=(0,2\sqrt{2}t,2-2t)$。$\vec{AM}\cdot\vec{AC}=8t$。投影系数 $=\frac{8t}{16}=\frac{t}{2}$。$\vec{AM}$ 垂直 $\vec{AC}$ 的分量：

$$\vec{u}=\vec{AM}-\tfrac{t}{2}\vec{AC}=(-\sqrt{2}\,t,\ \sqrt{2}\,t,\ 2-2t).$$

$|\vec{u}|^2=2t^2+2t^2+(2-2t)^2=8t^2-8t+4$。

$\vec{AD}=(0,2\sqrt{2},0)$，$\vec{AD}\cdot\vec{AC}=8$，投影系数 $=\frac{1}{2}$。

$$\vec{v}=\vec{AD}-\tfrac{1}{2}\vec{AC}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0),\quad |\vec{v}|=2.$$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=2t+2t+0=4t$。

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}=\frac{4t}{2\sqrt{8t^2-8t+4}}=\frac{2t}{\sqrt{8t^2-8t+4}}.$$

设 $=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 且 $t\in(0,1)$（$t>0$ 保证 $\cos>0$）：

$$\frac{4t^2}{8t^2-8t+4}=\frac{1}{2}\Rightarrow 8t^2=8t^2-8t+4\Rightarrow t=\tfrac{1}{2}.$$

故 $t=\dfrac{1}{2}$，即 M 是 PD 的**中点**。

5.3 提高 3：矩形沿 EF 折叠

例（折叠求距离）.

矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$AD=4$；E,F 分别在 AD,BC 上使 $DE=CF=1$。沿 EF 将矩形右端的 $CDEF$ 部分折起到 $C'D'EF$，使二面角 D'-EF-A 为 $60°$。求 D' 到平面 $ABFE$ 的距离。

解.

建系：折叠后保持底面 $ABFE$ 不动。取 $A=(0,0,0)$，x 沿 AB，y 沿 AE（即 AD）：

$$A=(0,0,0),\ B=(2,0,0),\ F=(2,3,0),\ E=(0,3,0).$$

（$AE=AD-DE=4-1=3$；F 为 BC 上距 C 为 1 即距 B 为 3 之点。）

折叠前 D 在 y 正方向、距 E 为 1。折叠后 D' 绕轴 EF（沿 x 轴方向）旋转 $60°$（由二面角决定）：

$$\vec{ED'}=(0,\ \cos 60°,\ \sin 60°)=\left(0,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

即 $D'=E+\vec{ED'}=\left(0,\ \tfrac{7}{2},\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$。

底面 $ABFE$ 在 xy 平面内，D' 到底面的距离即 D' 的 z 坐标绝对值：

$$d=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故 D' 到平面 $ABFE$ 的距离为 $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$。

5.4 提高 4：异面直线角

例（异面直线角的小综合）.

在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，棱长为 1，M,N 分别是 A_1B,C_1D 的中点。求异面直线 MN 与 AC_1 所成角的余弦值。

解.

建系：$A=(0,0,0)$，$B=(1,0,0)$，$C=(1,1,0)$，$D=(0,1,0)$，$A_1=(0,0,1)$，$B_1=(1,0,1)$，$C_1=(1,1,1)$，$D_1=(0,1,1)$。

$$M=\tfrac{1}{2}(A_1+B)=(\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2}),\quad N=\tfrac{1}{2}(C_1+D)=(\tfrac{1}{2},1,\tfrac{1}{2}).$$

$$\vec{MN}=(0,1,0),\ |\vec{MN}|=1;\quad \vec{AC_1}=(1,1,1),\ |\vec{AC_1}|=\sqrt{3}.$$

$$\vec{MN} \cdot \vec{AC_1} = 1.$$

$$\cos\angle = \frac{|1|}{1 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故 MN 与 AC_1 所成角的余弦值为 $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$。

注.

本章要点:

- **求参数**（线段比、点位置）——先写**参数化坐标**，再让几何条件转化为关于参数的方程；
- **折叠问题**——关键是**折叠后的坐标**: 围绕折叠轴转动，用二面角大小写出旋转矩阵（或简单正交分解）；
- **异面直线角**的计算只需方向向量夹角**取绝对值再取锐角**，不涉及法向量。