球

Zircon

Contents

Part I

内切球

Chapter 1

内切球与体积分割法

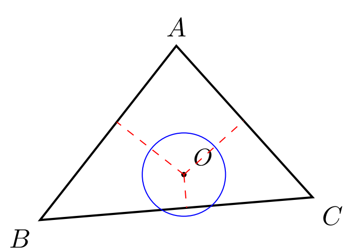
内切球是立体几何里的” 圆”——球面内切于多面体的所有面。它的核心刻画**从平面的内切圆平移而来**：**球心到每个面的距离相等**，这个公共距离就是半径 r。本章把二维” 内切圆——面积分割” 的套路升级到三维” 内切球——体积分割”。

1.1 内切圆与内切球的类比

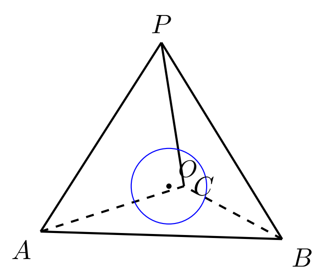
内切圆与内切球的平行刻画

- **内切圆**（三角形）：圆心 O 到三边的距离都等于 r——关心的是” **点到直线的距离**”。
- **内切球**（多面体）：球心 O 到各面的距离都等于 r——关心的是” **点到平面的距离**”。

两者都依靠**垂直关系**——内切圆的半径沿切点指向垂直于边；内切球的半径沿切点指向垂直于面。这种垂直关系在**求表面积或体积时非常有用**。



内切圆：O 到三边距离 $= r$



内切球：O 到四面距离 $= r$

1.2 分割法：由面积/体积反推半径

内切圆的面积分割公式

三角形 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r，周长记作 $C = a + b + c$。把三角形沿内心 O 剖成三个小三角形 $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCA$——每个小三角形的高都等于 r：

$$S = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br = \frac{1}{2}(a+b+c)r = \frac{1}{2}Cr.$$

重要公式：

$$\boxed{S_\triangle = \frac{1}{2}Cr.}$$

内切球的体积分割公式

多面体有内切球、球心为 O、半径为 r。把多面体沿 O 剖成若干” 以每个面为底、O 为顶” 的小棱锥——每个小棱锥的高都等于 r：

$$V = \sum_{\text{每个面}} \frac{1}{3} \cdot S_i \cdot r = \frac{1}{3} \cdot \left(\sum S_i\right) \cdot r = \frac{1}{3}S_{\text{表}} \cdot r.$$

重要公式：

$$\boxed{V = \frac{1}{3}S_{\text{表}} \cdot r.}$$

这条公式可以从**三个方向**用：

1. 已知 $V, S_{\text{表}}$ 求 r——**这是中学最常见的用法**；
2. 已知 $r, S_{\text{表}}$ 求 V；
3. 已知 V, r 求 $S_{\text{表}}$。

1.3 内切球存在性：哪些多面体有内切球？

注.

三种情形的总结：

- **所有三棱锥都有内切球**。✓——四个面的” 内角平分面” 一定交于一点，这个点到四面距离相等。
- **并非所有四棱锥都有内切球**。×——五个面的” 平分面” 一般不共点；需特殊条件（如对称）。
- **一般棱柱不一定有内切球**。×——比如底面为矩形（非正方形）的直棱柱，上下面与侧面之间距离可能不相等。

直觉：三棱锥是” 面数最少的立体”——四个平分面必共点；四棱锥及以上，面多了，

> ”一点到所有面都等距”就成了约束方程过多的超定系统，一般无解。

1.4 例：特殊四棱锥的内切球

例（存在内切球的条件决定底面尺寸）.

> 已知四棱锥 P-$ABCD$，平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为矩形，$\triangle PAB$ 是边长为 2 的正三角形。若 P-$ABCD$ 存在内切球，求此内切球的半径，以及此四棱锥的体积。

解.

设系建标。记 $A=(0,0,0)$，$B=(2,0,0)$，$D=(0,y,0)$，$C=(2,y,0)$（底面在 xOy 平面内，$y>0$ 待求）。平面 PAB 为 xOz 平面。$\triangle PAB$ 为边长 2 的正三角形，P 在 AB 中点 $M=(1,0,0)$ 正上方、高 $\sqrt{3}$，即 $P=(1,0,\sqrt{3})$。

内切球中心设 (c_x,c_y,c_z)**、半径** r。对称考虑：底面关于 $x=1$ 平面对称，故 $c_x=1$。球需与底面 $z=0$ 及侧面 PAB（$y=0$）相切：

$$c_z=r, \qquad c_y=r.$$

与面 PBC **相切的方程**。面 PBC 的方程经计算为 $\sqrt{3}x+z=2\sqrt{3}$。代入 $c_x=1,c_z=r$：

$$\text{距离}=\frac{|\sqrt{3}+r-2\sqrt{3}|}{\sqrt{3+1}}=\frac{\sqrt{3}-r}{2}=r \implies \sqrt{3}=3r \implies \boxed{r=\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

与面 PCD **相切定** y。面 PCD 过 $P(1,0,\sqrt{3}),C(2,y,0),D(0,y,0)$。法向 $(0,\sqrt{3},y)$，方程 $\sqrt{3}Y+yZ=\sqrt{3}y$。代入中心 $(1,r,r)$：

$$\frac{|\sqrt{3}r+yr-\sqrt{3}y|}{\sqrt{3+y^2}}=r.$$

用 $r=\sqrt{3}/3$ 代入并化简：$3\left(1-\frac{2\sqrt{3}y}{3}\right)^2=3+y^2 \implies 3y^2=4\sqrt{3}y \implies y=\frac{4\sqrt{3}}{3}$。

体积。底面 $ABCD$ 面积 $=2\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$；高 $=\sqrt{3}$（P 在底面的投影为 M，P 到底面距离 $=\sqrt{3}$）。

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}=\frac{8}{3}.$$

用体积分割法校验。$V=\frac{1}{3}S_{\text{表}}r$：

- 底 $ABCD$：$\frac{8\sqrt{3}}{3}$；
- $\triangle PAB$（等边边长 2）：$\sqrt{3}$；
- $\triangle PBC$：$PB=2,BC=\frac{4\sqrt{3}}{3},PC=\frac{2\sqrt{21}}{3}$——直角在 B（$PB^2+BC^2=PC^2$），面积 $=\frac{4\sqrt{3}}{3}$；对称 $\triangle PAD$ 同；
- $\triangle PCD$：$CD=2,PC=PD=\frac{2\sqrt{21}}{3}$，到 CD 的高 $=\frac{5}{\sqrt{3}}$，面积 $=\frac{5\sqrt{3}}{3}$。

合计 $S_{\text{表}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}+2\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{5\sqrt{3}}{3}=\frac{24\sqrt{3}}{3}=8\sqrt{3}$。$\frac{1}{3}\cdot8\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{24}{9}=\frac{8}{3}=V$ ✓。

注.

> **本题的关键点**：
>
> 1. **存在内切球这个条件并非” 白给”**——它**决定了底面的尺寸**。一般条件下，AD 的长是自由参数；要求有内切球，就**把自由度锁死**。
> 2. **对称设中心坐标**：利用 $x = 1$ 平面的对称性，把三维问题降到二维。
> 3. **两边验证**——直接算体积、又用体积分割公式 $V = \frac{1}{3}S_{表}r$ 再算一遍，是保险的好习惯。

Part II

外接球

Chapter 2

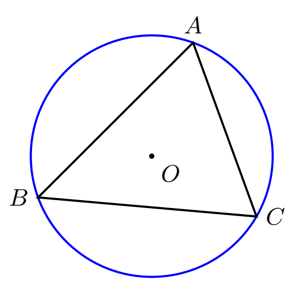
外接球：球心定位原理

外接球是”外接圆”的三维推广：球面过多面体的所有顶点，球心到各顶点距离都等于 R。求外接球的关键**不是算半径**，而是**找球心位置**——找到球心后，半径只是随手一算。

2.1 外接圆与外接球的类比

外接圆与外接球的平行刻画

- **外接圆**（三角形）：圆心 O 到三个顶点的距离都等于 R——即 O 是三边**中垂线的交点**。
- **外接球**（多面体）：球心 O 到各顶点的距离都等于 R——即 O 是各**边的中垂面的交点**。



外接圆：各边中垂线交点

2.2 外接球球心的定位原理

外接球球心与外接圆圆心的关系

设多面体有外接球，球心为 O。考虑**多面体某一个面**（设在平面 α 内）的顶点所构成的**外接圆**，圆心为 O'。则：

(i) $OO' \perp \alpha$——**球心到截面圆心的连线垂直于该面**；

(ii) 特别地，若截面过球心，则 $O = O'$ **重合**。

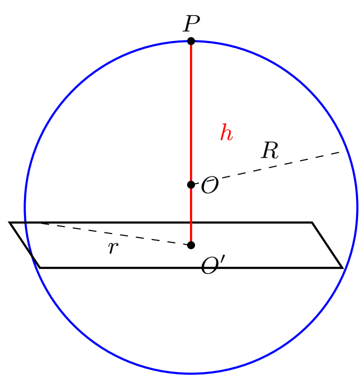
为什么？ 球心到该面上各顶点距离都是 R——这些距离等价于"O 到面内各顶点的距离"。由平面几何，O 在该面上的**垂足** O' 就是这些顶点的外接圆圆心。故 $OO' \perp \alpha$。

外接球半径公式（垂线模型）

若多面体外接球球心在**过底面外接圆圆心** O' **且垂直于底面的直线**上，顶点 P 到底面距离为 h，底面外接圆半径为 r，则：

$$R^2 = (R-h)^2 + r^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{R = \frac{h^2 + r^2}{2h}.}$$

推导：球心 O 在 O' 正上方距离 $d = R - h$（若 $h < R$），由 O 到顶点 P（正上方距离 h）的距离等于 R 得 $R^2 = (h-d)^2 + 0^2$，而 O 到底面一顶点（距离 O' 为 r）距离 R 得 $R^2 = d^2 + r^2$。联立消去 d。



注.

球心定位的三步走：

1. **找一个"好"的面**——外接圆圆心能算出来的（一般选底面、或含特殊几何信息的面）；
2. **过外接圆圆心作垂线**——球心必在此线上；
3. **用"球心到各顶点距离相等"列方程**——常常化成 $R^2 = (h-R)^2 + r^2$ 或类似形式。

什么是"好"的面？外接圆圆心**有显式描述**的面，常见：

- **正多边形**：圆心即中心；
- **直角三角形**：圆心为**斜边中点**；
- **等腰/等边**：由对称确定圆心位置。

Chapter 3

正四面体与正三棱锥

正四面体是最”对称”的立体——四个面都是全等的正三角形。它同时有外接球与内切球，且两球**同心**。本章通过两种方法求其半径，并推广到一般正三棱锥。

3.1 正四面体：外接球与内切球

正四面体（棱长 a）的关键数据

设正四面体 $ABCD$ 棱长为 a。

- **底面外接圆半径**（等边三角形外接圆）：$r_\triangle = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$；
- **高**（顶点到对面距离）：$h = \sqrt{a^2 - r_\triangle^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$；
- **外接球半径**：$R = \dfrac{\sqrt{6}}{4}a$；
- **内切球半径**：$r = \dfrac{\sqrt{6}}{12}a$；
- **重要关系**：$R = 3r$， $R + r = h$。

例（方法一：代数法求外接球半径）.

> 证明正四面体（棱长 a）的外接球半径 $R = \dfrac{\sqrt{6}}{4}a$。

解.

由对称性，球心 O 在”顶点到对面中心 O' 的连线”上。设 O 在 O' 上方距离 d，则 O 到底面一顶点 B 的距离：$OB^2 = d^2 + r_\triangle^2 = d^2 + \frac{a^2}{3}$；$O$ 到顶点 A（距离底面 h）的距离：$OA^2 = (h-d)^2$。令 $OA = OB = R$：

$$(h-d)^2 = d^2 + \tfrac{a^2}{3} \implies h^2 - 2hd = \tfrac{a^2}{3} \implies d = \frac{h^2 - a^2/3}{2h}.$$

代入 $h=\frac{\sqrt{6}}{3}a$：$h^2=\frac{2a^2}{3}$，故 $h^2-\frac{a^2}{3}=\frac{a^2}{3}$，于是 $d=\dfrac{a^2/3}{2\cdot\sqrt{6}a/3}=\dfrac{a}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}a}{12}$。

$$R=h-d=\frac{\sqrt{6}a}{3}-\frac{\sqrt{6}a}{12}=\frac{4\sqrt{6}a-\sqrt{6}a}{12}=\frac{3\sqrt{6}a}{12}=\frac{\sqrt{6}a}{4}.\quad\square$$

顺带：$d=\dfrac{\sqrt{6}a}{12}=r$（**球心到底面的距离恰好等于内切球半径**）。由球心的对称性，内切球与外接球同心，所以**内切球半径** $r=\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$。

例（方法二：体积分割法求内切球半径）.

利用 $V=\frac{1}{3}S_{表}\cdot r$ 求正四面体内切球半径。

解.

正四面体四个面都是边长 a 的正三角形，单面面积 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$。

$$S_{表}=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\sqrt{3}\,a^2.$$

体积用底面与高：$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{18}}{36}a^3=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$。

由 $V=\frac{1}{3}S_{表}r$：

$$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}a^2\cdot r\implies r=\frac{\sqrt{2}a}{12}\cdot\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{12}a=\frac{\sqrt{6}}{12}a.$$

妙处：这等价于 $h=4r$——对**等面积四面体**，四个面分别为底、内心为顶的四个小锥体合起来恰是整体，故”内心到某面距离 $=r$”而”顶点到对面距离 $=h$”，由体积守恒得到 $Sh=4Sr\implies h=4r$。

例（方法三：嵌入立方体）.

把正四面体嵌入一个立方体的四个交错顶点——利用立方体对角线求外接球半径。

解.

将棱长 a 的正四面体嵌入立方体，使立方体的面对角线恰为正四面体的棱。设立方体棱长为 s，则正四面体棱长 $a=s\sqrt{2}$，即 $s=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$。

立方体与正四面体**共享外接球**（球心在立方体中心，球面通过立方体八个顶点，当然也通过其中四个——正四面体的顶点）。立方体外接球直径即空间对角线 $\sqrt{3}s$：

$$2R=\sqrt{3}s=\sqrt{3}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}a\implies R=\frac{\sqrt{6}}{4}a.\quad\square$$

与方法一结论一致。

注.

> **正四面体三件套**：
> $$h = \frac{\sqrt{6}}{3}a, \qquad R = \frac{\sqrt{6}}{4}a, \qquad r = \frac{\sqrt{6}}{12}a.$$
> 关系 $R = 3r$ 和 $R + r = h$。
> **记忆**：$R : r = 3 : 1$，$R : h = 3 : 4$，$r : h = 1 : 4$。

3.2 一般正三棱锥

正三棱锥的外接球公式

正三棱锥：顶点 P 在底面（正三角形）中心正上方，底边长 a、高（侧棱在底面的投影到底面中心距离 $= 0$；顶点到底面距离 $= h$）。球心在顶点到底面中心的连线上，由 $R^2 = (h - R)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2$ 得：

$$R = \frac{h^2 + a^2/3}{2h}.$$

等价于一般”垂线模型”公式 $R = \frac{h^2 + r^2}{2h}$，取 $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$。

一般”顶点在底面外接圆圆心正上方”的外接球模型

若立体有一**”轴”**：顶点 P 在底面（某多边形）外接圆圆心 O' 正上方，距离 h。底面外接圆半径 r。则外接球球心 O 也在此轴上，由

$$R^2 = (R - h)^2 + r^2$$

得 $\boxed{R = \frac{h^2 + r^2}{2h}}$。
两种情形：

- $h > R$：球心在 O' 与 P 之间；
- $h < R$: 球心在 O' 的”底面另一侧”延长线上——若 P 与 O' 之间夹球心, $h = 2R$ 时 P 在球面上；$h < 2R$ 且 $h < R$ 时球心”下陷”到底面之下。

公式对这两种情形都适用——$\frac{h^2 + r^2}{2h}$ 自动给出正确的 R。

Chapter 4

补形法：长方体模型

某些三棱锥**天生" 嵌在长方体里"**——把它" 补" 成长方体后，外接球即长方体的外接球，球心在长方体中心、半径为空间对角线之半。这一策略**避开繁琐的球心坐标计算**，一步到位。

4.1 对棱相等的三棱锥

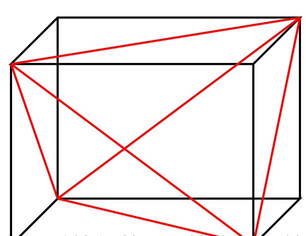
对棱相等三棱锥 $\to$ 长方体

若三棱锥的**三组对棱两两相等**（设对棱长分别为 a,b,c——即 $AB=CD=a$，$AC=BD=b$，$AD=BC=c$），则可把它嵌入一个长方体中，使**三棱锥的六条棱成为长方体的六条面对角线**。
设长方体棱长为 m,n,p，由面对角线关系：

$$\begin{cases} m^2+p^2=a^2 \\ m^2+n^2=b^2 \\ n^2+p^2=c^2 \end{cases} \implies m^2+n^2+p^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

长方体空间对角线 $=\sqrt{m^2+n^2+p^2}$，等于外接球直径 $2R$：

$$(2R)^2=m^2+n^2+p^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \implies \boxed{R^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{8}.}$$



嵌入长方体的" 对棱相等" 三棱锥：六棱即六条面对角线

例（对棱相等公式应用）.

三棱锥 $ABCD$ 中 $AB = CD = \sqrt{5}$，$AC = BD = \sqrt{10}$，$AD = BC = \sqrt{13}$。求其外接球半径。

解.

$a = \sqrt{5}, b = \sqrt{10}, c = \sqrt{13}$。

$$R^2 = \frac{5+10+13}{8} = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}, \qquad R = \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

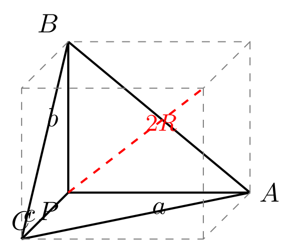
表面积 $= 4\pi R^2 = 14\pi$。

4.2 墙角三棱锥（三条棱两两垂直）

墙角模型 → 长方体

墙角三棱锥：一个顶点 P 处有**三条棱** PA, PB, PC **两两互相垂直**（像墙角一样）。这个三棱锥恰好是" 长方体切去一角"——可以把它补回一个**长方体**，P-ABC 就是长方体的一角，PA, PB, PC 分别为长方体的三条棱。
设 $PA = a, PB = b, PC = c$。长方体的空间对角线 $= \sqrt{a^2+b^2+c^2}$，即外接球的直径 $2R$：

$$\boxed{R^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{4}.}$$



例（墙角模型公式应用）.

三棱锥 S-ABC 中 $SA \perp SB$、$SB \perp SC$、$SC \perp SA$，且 $SA = 1, SB = 2, SC = 3$。求其外接球半径与表面积。

解.

$R^2 = \dfrac{1+4+9}{4} = \dfrac{14}{4} = \dfrac{7}{2}$，$R = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$。
表面积 $= 4\pi R^2 = 14\pi$。

4.3 墙角模型的”变体”：三面对角线为棱

以三面对角线为棱的三棱锥

如果三棱锥的三条棱**长度是某长方体的三条面对角线**，即

$$\begin{cases} m^2 = a^2 + b^2 \\ n^2 = b^2 + c^2 \\ p^2 = a^2 + c^2 \end{cases}$$

则 $m^2 + n^2 + p^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$，而 $(2R)^2 = a^2 + b^2 + c^2$（长方体空间对角线），故

$$\boxed{R^2 = \frac{m^2 + n^2 + p^2}{8}.}$$

注意与对棱相等公式的差别：对棱相等时 $R^2 = (a^2 + b^2 + c^2)/8$，这里的 a, b, c 是三棱锥的**实际棱长**；而这里 m, n, p 是**特殊几何描述**下的棱长。

注.

补形法的适用特征——识别”可补成长方体”的立体：

- **对棱相等**的三棱锥（三组对棱长相等）$\Rightarrow$ 棱为**面对角线**；
- **墙角三棱锥**（三棱两两垂直）$\Rightarrow$ 棱为长方体**棱**；
- **三棱锥某面垂直于另一面且共一边**——常可补长方体的**半个**；
- **三棱锥嵌在正方体顶点**（如取正方体四个交错顶点得正四面体）——共享外接球。

方法本质：**用立体”外接于**长方体”的**对称性**，避免求球心坐标。

Chapter 5

特殊垂直结构的外接球

除了正多面体与长方体模型外，高考还常见**含”垂直”结构**的立体外接球题型。本章整理几类：侧棱垂直底面、侧面垂直底面、两侧面互垂直。统一策略：**找一个”好”面 $\to$ 过外接圆圆心作垂线 $\to$ 球心必在此垂线上 $\to$ 代入距离方程**。

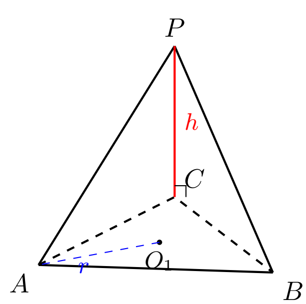
5.1 一侧棱垂直于底面

模型：$PC \perp$ 底面 $\triangle ABC$

若三棱锥 P-ABC 中 $PC \perp$ 平面 ABC，则 PC 是**外接球的一条弦**（弦指球面上两点连线段）。

球心定位：过 $\triangle ABC$ 外接圆圆心 O_1 作底面垂线 ℓ_1；过 PC 的中点 M 作 PC 的中垂面 α。球心 O 在 $\ell_1 \cap \alpha$——即 O 在 ℓ_1 上且 $OM \perp PC$。设 r 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径、$PC = h$。由球心在 ℓ_1 上且与 P, C 等距：

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2.$$



例（侧棱垂直模型应用）.

三棱锥 S-ABC 所有顶点都在球 O 面上，$SA \perp$ 平面 ABC，$SA = 2\sqrt{3}, AB = 1, AC = 2, \angle BAC = \frac{\pi}{3}$。求球 O 的表面积。

解.

底面 $\triangle ABC$ 外接圆半径。由余弦定理 $BC^2 = 1+4-2\cdot 1\cdot 2\cdot \cos\frac{\pi}{3} = 3$，$BC = \sqrt{3}$。正弦定理：

$$\frac{BC}{\sin\angle BAC} = 2r \implies r = \frac{\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{3}/2} = 1.$$

用模型公式。SA 垂直底面，$SA = 2\sqrt{3}$：

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2 = 1+3 = 4, \qquad R = 2.$$

表面积 $= 4\pi R^2 = 16\pi$。

5.2 两侧面互相垂直

模型：平面 $PAC \perp$ 平面 BAC

设两侧面 $\triangle PAC$ 与 $\triangle BAC$ 共一边 AC，且**两平面互相垂直**（记 $AC = l$、两三角形外接圆半径分别为 r_1, r_2，圆心 O_1, O_2）。
球心定位：过 O_1 作 PAC 的垂线 ℓ_1，过 O_2 作 BAC 的垂线 ℓ_2。两线在空间中交于点——由**两平面垂直**，ℓ_1 在 BAC 内，ℓ_2 在 PAC 内，**两线交点恰为球心** O。
代数上： O_1 到 AC 的距离为 $\sqrt{r_1^2-(l/2)^2}$（由 O_1 是 $\triangle PAC$ 外心到弦 AC 距离）；同理 O_2 到 AC 的距离为 $\sqrt{r_2^2-(l/2)^2}$。利用两平面垂直、O, O_1, O_2 组成的直角三角形关系：

$$R^2 = \left[r_1^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right] + \left[r_2^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right] + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = r_1^2 + r_2^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

重要公式： $\boxed{R^2 = r_1^2 + r_2^2 - (l/2)^2.}$

例（两侧面互垂直公式应用）.

点 A 是以 BC 为直径的圆 O 上异于 B, C 的动点，P 为平面 ABC 外一点，平面 $PBC \perp$ 平面 ABC，$BC = 3, PB = 2\sqrt{2}, PC = \sqrt{5}$。求三棱锥 P-ABC 外接球的表面积。

解.

两平面共边 BC**、互相垂直**——正是上述模型。**共边长** $l = BC = 3$。

$\triangle ABC$ **外接圆半径** r_1：由于 BC 是圆 O 的直径，A 在此圆上，故 $\triangle ABC$ 的外接圆**就是**圆 O，半径 $r_1 = \frac{3}{2}$。

$\triangle PBC$ **外接圆半径** r_2：$PB = 2\sqrt{2}, PC = \sqrt{5}, BC = 3$。$\cos\angle BPC = \dfrac{8+5-9}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} =$

$\dfrac{4}{4\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$，$\sin\angle BPC = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$（由 $\sin^2 + \cos^2 = 1$）。正弦定理：

$$r_2 = \frac{BC}{2\sin\angle BPC} = \frac{3}{2\cdot 3/\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

套公式：

$$R^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

表面积 $= 4\pi R^2 = 10\pi$。

5.3 两侧面为直角三角形、共斜边

模型：两直角三角形拼成的四面体

若四面体 P-ABC 中两侧面 $\triangle PAB, \triangle QAB$ 都是**以 AB 为斜边**的直角三角形——即 $\angle APB = \angle AQB = 90°$（这里笔记中的 P, Q 是四面体的两个异于 A, B 的顶点）。**关键观察**：直角 $\angle APB$ 意味 P 在以 AB 为直径的圆上；直角 $\angle AQB$ 意味 Q 在以 AB 为直径的圆上。故 A, B, P, Q 都在以 AB **为直径的球面**上——AB **就是外接球的直径**。

$$\boxed{R = \frac{AB}{2}.}$$

注.

本章三个模型一览：

1. **一侧棱 $\perp$ 底面**：$R^2 = r^2 + (h/2)^2$（$r =$ 底面外接圆半径，$h =$ 垂直棱长）；
2. **两侧面互垂直、共边**：$R^2 = r_1^2 + r_2^2 - (l/2)^2$（$r_i =$ 两面外接圆半径，$l =$ 共边长）；
3. **两侧面均为以共边为斜边的直角三角形**：$R = \dfrac{AB}{2}$——**共边就是直径**。

识别流程：看到” 垂直” 关键词 $\to$ 判断是” 棱 $\perp$ 面”、” 面 $\perp$ 面”、还是” 棱之间互垂直” $\to$ 选对应模型。

Part III

精选题

Chapter 6

精选题

本章 10 道典型问题覆盖前面所有模型——**一侧棱垂直、两面互垂直、墙角模型、正四面体、直径角、球在柱体内最大化**等。每题都标注所用模型，方便复盘。

6.1 填空题

例（圆锥的外接球）.

> 已知点 O 为圆锥 PO 底面的圆心，圆锥 PO 的轴截面为边长为 2 的等边三角形 PAB，求圆锥 PO 的外接球的表面积。

解.

> 轴截面边长 2 的等边三角形：底面半径 $r=1$、母线 $l=2$、高 $h=\sqrt{3}$。外接球球心在轴 PO 上。设球心在 O 正上方距离 d，则
>
> $$R^2=d^2+1^2,\qquad R^2=(h-d)^2=(\sqrt{3}-d)^2.$$
>
> 联立：$d^2+1=3-2\sqrt{3}d+d^2 \implies 2\sqrt{3}d=2 \implies d=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$。$R^2=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$。表面积 $=4\pi R^2=\boxed{\dfrac{16\pi}{3}}$。

例（侧棱垂直模型）.

> 三棱锥 $S\text{-}ABC$ 所有顶点在球 O 面上，$SA\perp$ 平面 ABC，$SA=2\sqrt{3},AB=1,AC=2,\angle BAC=\frac{\pi}{3}$。求球 O 的表面积。

解.

（见 Ch5 例 1）$BC=\sqrt{3}$，$\triangle ABC$ 外接圆 $r=1$，

$$R^2=r^2+\left(\frac{SA}{2}\right)^2=1+3=4.$$

表面积 $=\boxed{16\pi}$。

例（两平面垂直模型）.

点 A 是以 BC 为直径的圆 O 上异于 B,C 的动点，P 为平面 ABC 外一点，平面 $PBC\perp$ 平面 ABC，$BC=3,PB=2\sqrt{2},PC=\sqrt{5}$。求三棱锥 P-ABC 外接球表面积。

解.

（见 Ch5 例 2）$r_1=\frac{3}{2}$（$\triangle ABC$ 内接于以 BC 为直径的圆，所以外接圆即此圆），$r_2=\frac{\sqrt{10}}{2}$，$l=3$。

$$R^2=r_1^2+r_2^2-(l/2)^2=\frac{9}{4}+\frac{10}{4}-\frac{9}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}.$$

表面积 $=\boxed{10\pi}$。

例（正四面体内点到各面距离之和）.

棱长为 1、各面都为等边三角形的四面体内有一点 P，由 P 向各面作垂线，垂线段长度分别为 d_1,d_2,d_3,d_4。求 $d_1+d_2+d_3+d_4$。

解.

正四面体**各面面积相等**，设为 S。$S=\frac{\sqrt{3}}{4}$。**体积分割**：$V=\frac{1}{3}Sd_1+\frac{1}{3}Sd_2+\frac{1}{3}Sd_3+\frac{1}{3}Sd_4=\frac{S}{3}(d_1+\cdots+d_4)$。

另一方面，正四面体的高 $h=\frac{\sqrt{6}}{3}$；以某面为底、对顶点为顶，$V=\frac{1}{3}Sh$。两式相等：

$$d_1+d_2+d_3+d_4=h=\boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}.$$

结论：对**各面等面积的多面体**，内部任一点到各面距离之和**为常数**——等于”以该常面积为底、对应高”的几何量。这是体积分割法的一个漂亮应用。

例（正三棱柱的三棱锥体积）.

正三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中 $AB=4,AA_1=6$，E,F 分别是棱 BB_1,CC_1 上的点。求三棱锥 A-A_1EF 的体积。

解.

关键观察：体积与 E, F 的具体位置**无关**。

设 $A = (0,0,0), B = (4,0,0), C = (2,2\sqrt{3},0), A_1 = (0,0,6)$，$E = (4,0,t)$，$F = (2,2\sqrt{3},s)$。

$$V = \frac{1}{6}\left|\det[\vec{AA_1}, \vec{AE}, \vec{AF}]\right| = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix}0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 2\sqrt{3}\\ 6 & t & s\end{pmatrix}\right|.$$

沿第 1 行展开（第 1 行是 $AA_1 = (0,0,6)$）：

$$\det = 6\cdot\det\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & 2\sqrt{3}\end{pmatrix} = 6\cdot 4\cdot 2\sqrt{3} = 48\sqrt{3}.$$

$V = \dfrac{48\sqrt{3}}{6} = \boxed{8\sqrt{3}}$。

几何直觉：E, F 在与 AA_1 方向**平行**的棱上移动；$\vec{AE} = \vec{AB} + t\vec{AA_1}$，$\vec{AF} = \vec{AC} + s\vec{AA_1}$。行列式 $\det[\vec{AA_1}, \vec{AE}, \vec{AF}] = \det[\vec{AA_1}, \vec{AB} + t\vec{AA_1}, \vec{AC} + s\vec{AA_1}] = \det[\vec{AA_1}, \vec{AB}, \vec{AC}]$（向量的线性性质），确实与 t, s 无关。

例（直三棱柱内最大球）.

底面边长 $3, 4, 5$、高 6 的直三棱柱容器内放置一气球，使气球尽可能膨胀（保持球的形状）。求气球表面积的最大值。

解.

$3, 4, 5$ 是**直角三角形**（$3^2 + 4^2 = 5^2$）。其内切圆半径 $r_{底} = \dfrac{3+4-5}{2} = 1$。

球内置直三棱柱：**半径受两限制**

- **径向**（由底面形状）：$R \le r_{底} = 1$；
- **轴向**（由高）：$2R \le 6 \implies R \le 3$。

取更严的 $R = 1$。表面积最大值 $= 4\pi R^2 = \boxed{4\pi}$。

直角三角形内切圆半径公式：若两直角边 a, b、斜边 c，则 $r = \dfrac{a+b-c}{2}$。

6.2 选择题

例（折叠四棱锥的外接球）.

圆形纸片的圆心为 O，半径 6。纸片上的正方形 $ABCD$ 的中心为 O。E, F, G, H 为圆 O 上的点，$\triangle ABE, \triangle BCF, \triangle CDG, \triangle ADH$ 分别为以 AB, BC, CD, DA 为底的等腰三角形。沿虚线剪开后，分别以这四条边为折痕向上折起使 E, F, G, H 重合，得一四棱锥。当该四棱锥的侧面积是底面积的 2 倍时，其外接球的表面积为

$$(A)\,\tfrac{16\pi}{3},\quad (B)\,\tfrac{25\pi}{3},\quad (C)\,\tfrac{64\pi}{3},\quad (D)\,\tfrac{100\pi}{3}.$$

解.

设正方形边长 a。$OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$，故三角形 $\triangle ABE$ 的高 $= 6 - \dfrac{a}{2}$（从 AB 中点到 E 沿径向）。

底面积 $= a^2$，**侧面积** $= 4 \cdot \frac{1}{2}a(6 - \frac{a}{2}) = 12a - a^2$。

$$\text{侧} = 2 \cdot \text{底}: \quad 12a - a^2 = 2a^2 \implies a = 4.$$

折叠后的几何量：底面正方形边长 4，半对角线 $2\sqrt{2}$；侧面三角形的斜高（从顶 E 到底面边 AB）为 $6 - 2 = 4$。顶点到底面的距离 h：

$$h = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

（4 是斜高，2 是从底面中心到边 AB 的距离。）

外接球：球心在锥轴上，距底面 k，半径 R。

$$R^2 = (2\sqrt{3} - k)^2 = k^2 + (2\sqrt{2})^2 \implies 12 - 4\sqrt{3}k = 8 \implies k = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$R^2 = k^2 + 8 = \frac{1}{3} + 8 = \frac{25}{3}$。表面积 $= 4\pi \cdot \frac{25}{3} = \dfrac{100\pi}{3}$——**答案 (D)**。

例（正方体两球 MN 的范围（多选））.

正方体的外接球与内切球上各有一动点 M, N，线段 MN 的最小值为 $\sqrt{3} - 1$。下列结论正确的是：

(A) 外接球表面积为 12π；　(B) 内切球体积为 $\pi/3$；　(C) 棱长为 1；　(D) MN 最大值为 $\sqrt{3} + 1$。

解.

设棱长为 a。**两球同心**（均以正方体中心为球心）——内切球半径 $\frac{a}{2}$、外接球半径 $\frac{\sqrt{3}a}{2}$。M, N 分别在两球面上，到公共球心距离分别为 $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ 与 $\frac{a}{2}$。距离 $|MN|$ 的范围：

$$\frac{\sqrt{3}a}{2} - \frac{a}{2} \le |MN| \le \frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{a}{2}.$$

即 $\dfrac{(\sqrt{3}-1)a}{2} \le |MN| \le \dfrac{(\sqrt{3}+1)a}{2}$。

由 $\frac{(\sqrt{3}-1)a}{2} = \sqrt{3} - 1$ 得 $a = 2$。

逐项检验：

- (A) 外接球半径 $\sqrt{3}$，表面积 $4\pi \cdot 3 = 12\pi$ ✓；
- (B) 内切球半径 1，体积 $\frac{4\pi}{3} \neq \frac{\pi}{3}$ ×；
- (C) 棱长为 2 而非 1 ×；

- (D) $|MN|$ 最大值 $= \frac{(\sqrt{3}+1)\cdot 2}{2} = \sqrt{3}+1$ ✓。

正确选项：(A)(D)。

例（直径角模型）.

三棱锥 S-ABC 所有顶点在球 O 面上，$\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形，SC 为球 O 的直径，$SC=2$。求此棱锥的体积。

$$(A)\tfrac{\sqrt{2}}{6},\quad (B)\tfrac{\sqrt{3}}{6},\quad (C)\tfrac{\sqrt{2}}{3},\quad (D)\tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

解.

SC 是直径 $\Rightarrow R=1$。**球面上任何点 P 对直径 SC 张的角** $\angle SPC = 90^\circ$（即：” **直径对应圆周角** 90°” 的三维推广）。故 $\angle SAC = \angle SBC = 90^\circ$。

由 $\angle SAC = 90^\circ, AC=1, SC=2$：$SA=\sqrt{SC^2-AC^2}=\sqrt{3}$。同理 $SB=\sqrt{3}$。

求高 h：S 到平面 ABC 的距离。取 $\triangle ABC$ 外心 G——正三角形中心到顶点距离 $\frac{1}{\sqrt{3}}$。球心 O 在过 G 垂直底面的线上，距离 $\sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$。$S = 2O - C$——$S$ 在底面外侧。设 C 在底面内（$z=0$），O 在 $z=\sqrt{2/3}$ 处且 xy-坐标 $= G$。则 $S = 2\cdot(G,\sqrt{2/3}) - (C,0) = (2G-C, 2\sqrt{2/3})$。$S$ 到底面距离 $= 2\sqrt{2/3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$。

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{18}}{18} = \frac{3\sqrt{2}}{18} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

答案 (A)。

例（斜三棱柱的体积）.

斜三棱柱底面是边长为 4 的正三角形，侧棱长 5。若其中一条侧棱与底面三角形的相邻两边都成 60° 角，求此三棱柱的体积。

$$(A)\tfrac{50\sqrt{3}}{3},\quad (B)20\sqrt{3},\quad (C)\tfrac{50\sqrt{2}}{3},\quad (D)20\sqrt{2}.$$

解.

底面积 $= \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 16 = 4\sqrt{3}$。

求侧棱在底面方向的分解。设 AB, AC 为底面正三角形 A 处的两条相邻边（$\angle BAC = 60^\circ$），侧棱 AA' 与 AB, AC 都成 60° 角。取 AB, AC 为单位向量 $\vec{u}_1, \vec{u}_2$（$\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$）。

设 $\vec{v}$ 为侧棱方向的单位向量，分解 $\vec{v} = p\cdot\dfrac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{|\vec{u}_1+\vec{u}_2|} + q\vec{n}$（$\vec{n}$ 为底面单位法向）。由 $\vec{v}\cdot\vec{u}_1 = \frac{1}{2}$：

$$p\cdot\frac{(1+1/2)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \implies p = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = \text{let's redo: } p\cdot\frac{3/2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \implies p = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$p^2+q^2=1$，$p^2=\frac{1}{3}$，$q^2=\frac{2}{3}$，$q=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$。

棱柱高 $=$ 侧棱在法向的分量 $=5q=\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$。

$$V=4\sqrt{3}\cdot\frac{5\sqrt{6}}{3}=\frac{20\sqrt{18}}{3}=\frac{20\cdot 3\sqrt{2}}{3}=20\sqrt{2}.$$

答案 (D)。

注.

精选题涵盖的模型与思路:

- **轴线对称型外接球**（圆锥、正三棱锥、正四面体）——” 轴上球心、垂线模型”;
- **一边垂直型**（侧棱垂直底面、两面垂直共边、两直角共斜边）——三个公式套用即可;
- **长方体型**（墙角模型、对棱相等、四面体嵌正方体）——补成长方体借” 空间对角线”;
- **直径角模型**（球面上点对直径张 $90°$）——把” 过直径” 翻译成两直角三角形;
- **体积分割的两个应用**——求内切球半径、求多面体内点到各面距离之和;
- **” 平移不变” 体积**（棱上滑动点的三棱锥）——利用行列式线性性质;
- **容器内最大球**——多约束下取严者;
- **斜棱柱体积**（侧棱与底面夹角）——向量分解法。