数学基础思维

Zircon

Contents

Chapter 1

式子处理

很多题目难，不是难在思路，而是难在式子的形状不顺手。这一章把常用的”整理式子”的招式过一遍：换元、拆项、消次、齐次化、分式处理，最后落到数形结合——把式子翻译成图上的几何量来读。

1.1 换元法

正如研究函数要先研究函数的定义域，引入新元后，必不可少的一步是研究**新元的取值范围**。

例（1）.

> 设 $f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta$，$\theta\in\mathbb{R}$，求 $f(\theta)$ 的值域。

解.

依模型：$\sin\theta+\cos\theta$ 与 $\sin\theta\cos\theta$ 之间，有桥梁 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$。

令 $t=\sin\theta+\cos\theta$，先用 t 去写 $(\sin\theta+\cos\theta)$ 与 $(\sin\theta\cos\theta)$ 的关系，并先求出 t 的范围：

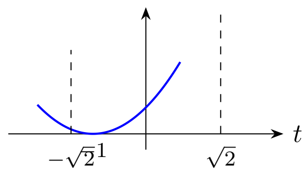
$$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\tfrac{\pi}{4}\right)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}].$$

又 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$，故 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$。于是

$$f(\theta)=t+\frac{t^2-1}{2}=\frac{1}{2}(t+1)^2-1,\qquad t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}].$$

这是关于 t 的二次函数，顶点 $t=-1$ 在区间内，取最小值 -1；右端 $t=\sqrt{2}$ 取最大值 $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^2-1=\sqrt{2}+\frac{1}{2}$。

$$\text{值域}=\left[-1,\ \sqrt{2}+\tfrac{1}{2}\right].$$



1.2 拆项法

裂项：等差型

例（2）.

已知数列 $\{a_n\}$ 有 $a_n = \dfrac{1}{(2n+1)(2n-1)}$，$T_n$ 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，求 T_n。

解.

分母两个因子相差 2，凑出这个因子（容易漏掉这个 $\frac{1}{2}$）：

$$a_n = \frac{\frac{1}{2}\left[(2n+1)-(2n-1)\right]}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

逐项相消：

$$T_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}.$$

裂项：等比型

例（3）.

已知数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n = \dfrac{2^n}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n。若 $\forall n \in \mathbb{N}^+$，$a \in [-1,1]$ 均有 $x^2 - ax - 2S_n \geq 0$ 成立，求 x 的取值范围。

解.

把分子也拆成两个分母因子之差：$2^n = (2^{n+1}-1) - (2^n - 1)$，于是

$$b_n = \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1}-1}.$$

逐项相消：

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}-1}.$$

由极限思想，$n \to +\infty$ 时 $S_n \to 1$（且 $S_n < 1$）。要 $\forall n \in \mathbb{N}^+$ 都有 $x^2 - ax > 2S_n$，只需 $x^2 - ax \geq 2$，即

$$x^2 - ax - 2 \geq 0 \quad \text{对任意} a \in [-1,1] \text{ 恒成立}.$$

用主元法：把 $g(a)=x^2-ax-2$ 看作关于 a 的一次函数，区间端点处都非负即可。

$$\begin{cases} a=-1:\ x^2+x-2\ge 0 \ \Rightarrow\ x\in(-\infty,-2]\cup[1,+\infty) \\ a=1:\ x^2-x-2\ge 0 \ \Rightarrow\ x\in(-\infty,-1]\cup[2,+\infty) \end{cases}$$

两者取交集：

$$x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty).$$

裂项：等差 + 等比型

例（4）.

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\dfrac{(2n-3)\cdot 2^n}{4n^2-1}$，$S_n$ 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，求 S_n。

解.

等差 + 等比型数列，仍考虑裂项：要把它写成 $a_n=b_{n+1}-b_n$ 的形状。裂项后 $\{b_n\}$ 的分子应该除以 2（同样地，分母 $4n^2-1=(2n+1)(2n-1)$）。先把等差因子 $2n-3$ 用两个分母因子凑出来：

$$2n-3=2(2n-1)-(2n+1),$$

于是

$$a_n=\frac{[2(2n-1)-(2n+1)]\,2^n}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{2^{n+1}}{2n+1}-\frac{2^n}{2n-1}.$$

这正是 $b_{n+1}-b_n$ 的形状（$b_n=\frac{2^n}{2n-1}$），逐项相消，只剩头尾：

$$S_n=\frac{2^{n+1}}{2n+1}-2.$$

和项

裂项是把一项拆成两项之差再相消；和项则是把相邻两项**配对相加**，让中间整段消去。带 $(-1)^n$ 的交错数列常用这一招。

例（5）.

已知数列 $\{C_n\}$ 的通项公式为 $C_n=(-1)^n\dfrac{4n}{(2n+1)(2n-1)}$，$\{C_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求 T_n。

解.

先把 $\dfrac{4n}{(2n+1)(2n-1)}$ 裂开（$4n=(2n+1)+(2n-1)$）：

$$C_n=(-1)^n\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right).$$

当 n 为奇数时，设 $n = 2k-1$，把 C_n 与 C_{n+1} 配对：

$$C_n + C_{n+1} = -\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} = -\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+3}.$$

这样整段相消，到末项 n（奇数）时

$$T_n = -\frac{1}{2n+1} - 1 = -\frac{2n+2}{2n+1}.$$

当 n 为偶数时，同理可得

$$T_n = -\frac{2n}{2n+1}.$$

1.3 消次处理

$\left(x \pm \dfrac{1}{x}\right)$ 及其衍生式

$$\left(x \pm \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} \pm 2.$$

因此，如果出现 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 的形式，完全可以由常数的凑配，凑回 $\left(x \pm \frac{1}{x}\right)^2$ 这个完全平方式，实现形式的统一。

例（6）.

在平面直角坐标系 xOy 中，一点 (a, a) 到曲线 $y = \dfrac{1}{x}$ 上的点的距离的最小值为 $\sqrt{10}$，其中 $a > 0$，求 a 的值。

解.

设曲线上的点为 $(x, \frac{1}{x})$，则

$$\begin{aligned} d^2 &= (x-a)^2 + \left(\frac{1}{x} - a\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2a^2 - 2a\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) - 2 + 2a^2 - 2a\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2a\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2a^2 - 2. \end{aligned}$$

令 $t = x + \dfrac{1}{x}$（$x > 0$ 时 $t \geq 2$；这里取 $x > 0$ 一支即可），则

$$d^2 = (t-a)^2 + a^2 - 2, \qquad t \geq 2.$$

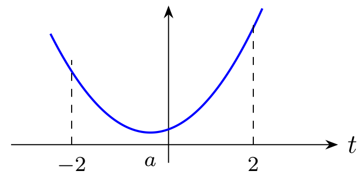
这是关于 t 的二次函数，分类讨论顶点 $t = a$ 是否落在 $t \geq 2$ 内：

1. $a \geq 2$ 时，顶点在区间内，$d^2_{\min} = a^2 - 2 = 10$，得 $a^2 = 12$，$a = 2\sqrt{3}$；
2. $0 < a < 2$ 时，区间内 d^2 在 $t = 2$ 处最小，

$$d^2_{\min} = (2-a)^2 + a^2 - 2 = 2a^2 - 4a + 2 = 10 \implies a^2 - 2a - 4 = 0,$$

   解得 $a = 1 - \sqrt{5}$。

所以 $a=2\sqrt{3}$ 或 $a=1-\sqrt{5}$。



基本不等式

例（7）．

已知 $a+2b=1$，求 $\dfrac{a^2+4b}{ab}$ 的最小值（$a>0,b>0$）。

解.

运用基本不等式中的”一正、二定、三相等”。要实现”定”，那么在关键步 $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ 中，xy 的次数应该是 0，即是个常数；那么在此前的 $x+y$ 中，x 与 y 的次数即应实现**中和**（相反）。

先拆开：

$$\frac{a^2+4b}{ab}=\frac{a}{b}+\frac{4}{a}.$$

$\frac{a}{b}$ 是 0 次、$\frac{4}{a}$ 是 -1 次，两者次数不会中和。而已知是 $a+2b=1$，左为 1 次、右为 0 次。因此，可借助常数的配凑实现**升次**，进而达到次数中和：

$$\frac{a^2+4b}{ab}=\frac{a}{b}+\frac{4\cdot 1}{a}=\frac{a}{b}+\frac{4(a+2b)}{a}=\frac{a}{b}+8\frac{b}{a}+4\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot 8\frac{b}{a}}+4=4\sqrt{2}+4.$$

当且仅当 $8b^2=a^2$ 时取等号。所以最小值为 $4\sqrt{2}+4$。

注.

在出现形如 $x+\dfrac{a}{x}$ 的式子时：

1. 看 a 的正负：$a>0$ 时图象是勾函数；$a<0$ 时图象是飘带函数。
2. 看 x 的取值：$a>0$ 时，当且仅当 $x=\pm\sqrt{a}$ 取得最值（极值），但 x 不一定可以取到 $\pm\sqrt{a}$（如 $x\in[\sqrt{a}+1,+\infty)$ 或 $x\in\mathbb{N}^+$），需结合 x 的范围另判。

1.4 齐次化处理

三角函数类

正、余弦为一次，正切为零次。如步用 $\sin^2x+\cos^2x=1$ 的关系凑出齐次，就能”弦化切”。

例（8）．

> 若 $\tan\theta = -2$，求 $\dfrac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}$。

解.

若以 θ 为基准，则 $\sin\theta, \cos\theta$ 为一次、$\tan\theta$ 为零次，$\sin 2\theta, \cos 2\theta$ 为二次。故待求式本身齐次，弦化切即可：

$$\begin{aligned}\frac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta} &= \frac{\tan\theta}{\tan\theta+1}\cdot\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}\\ &= \frac{\tan\theta}{\tan\theta+1}\left(1+\frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}\right) = \frac{-2}{-1}\left(1+\frac{-4}{5}\right) = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

变 1 法

前面引入 $1=\sin^2\theta+\cos^2\theta$，也是变 1 法的一种。如前所述，把 1 写成 $1 = tx + my$ 形式的式子，合理运用即可升次，从而对于整体的处理来说，可实现齐次（次数中和）。

例（9）.

> 已知 $a>0$，$b>0$，$2a+b=4$，求 $\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值。

解.

$\frac{4}{a}+\frac{1}{b}$ 次数不为 0，则对其升次，套用平时配凑的处理方法，即所谓"1 的妙用"：

$$\frac{4}{a}+\frac{1}{b} = 1\times\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{4}(2a+b)\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{4}\left(9+\frac{2a}{b}+\frac{4b}{a}\right) \geq \frac{9+4\sqrt{2}}{4}.$$

当且仅当 $a=\sqrt{2}\,b$ 时取得最小值 $\dfrac{9+4\sqrt{2}}{4}$。

赋予含义

如点 (x,y)（$x\neq 0$）对原点 O 求斜率 $k=\frac{y}{x}$，即是一个 0 次式——把这部分以斜率的赋义来观察，往往更常直观（坐标几何中很多最值问题，由此化为图上的斜率、距离来研究）。下面的椭圆例就是范例：通过**坐标平移**把 $k_{PM}+k_{PN}=0$ 化成齐次方程来读斜率。

例（10）.

> 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$，$C$ 上有一定点 $P(2,1)$，有一直线 l 与 C 相交于不同的两点 M,N，且满足 $k_{PM}+k_{PN}=0$。求证：直线 l 的斜率为一定值。

解.

$k_{PM}+k_{PN}=0$ 可以联系韦达定理，而 $k=\dfrac{y-1}{x-2}$。为方便该形式的实现，平移坐标系。令

$$\begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y-1 \end{cases} \implies \begin{cases} x=x'+2 \\ y=y'+1 \end{cases}$$

同时设直线 $mx'+ny'=1$。因坐标系平移前后直线的斜率保持不变，故在 $x'Oy'$ 下求出的 m,n 的关系，可用于直接求算斜率。

椭圆 $C:x^2+4y^2=8$ 平移后：

$$(x'+2)^2+4(y'+1)^2=8 \implies x'^2+4y'^2+4x'+8y'=0. \quad (*)$$

要使 $k=\dfrac{y'}{x'}$ 成为 $(*)$ 的根，则 $(*)$ 左侧必须齐次。代入 $1=mx'+ny'$，把一次项升次：

$$x'^2+4y'^2+4x'(mx'+ny')+8y'(mx'+ny')=0,$$

整理为齐次二次式

$$(4+8n)y'^2+(8m+4n)x'y'+(1+4m)x'^2=0.$$

同除以 x'^2，又 $k=\dfrac{y'}{x'}$，得

$$(4+8n)k^2+(8m+4n)k+(1+4m)=0.$$

两根之和 $k_1+k_2=-\dfrac{8m+4n}{4+8n}$。由 $k_{PM}+k_{PN}=0$，得 $8m+4n=0$，即 $2m+n=0$。于是

$$k=-\frac{m}{n}=-\frac{m}{-2m}=\frac{1}{2}.$$

所以直线 l 的斜率为一定值，此定值为 $\dfrac{1}{2}$。

1.5 分式处理

分式式子的处理，核心是看分子、分母的次数，再决定是**分离常数、整体换元**还是**裂项**。

分母为一次，视分子次数

(a) 分子为一次：分离常数变反比例函数。如

$$y=\frac{x+7}{x+3}=\frac{(x+3)+4}{x+3}=1+\frac{4}{x+3},$$

如此转化后，求单调性、值域都很直接。这类形变经常要灵活转化，例如

$$1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}, \qquad 1-\frac{x}{x+1}=\frac{1}{x+1}.$$

(b) 分子为二次：视分母为整体进行换元。如

$$y=\frac{x^2+2x+5}{x-1}\xrightarrow[x=t+1]{t=x-1}\frac{(t+1)^2+2(t+1)+5}{t}=\frac{t^2+4t+8}{t}=t+\frac{8}{t}+4,$$

又如

$$y=\frac{x^2-8x+9}{x+1}\xrightarrow[x=t-1]{t=x+1}\frac{(t-1)^2-8(t-1)+9}{t}=\frac{t^2-10t+18}{t}=t+\frac{18}{t}-10.$$

综上，换元并整理后可以得到两种形式的

$$y=x+\frac{a}{x}+b\ :\quad \begin{cases}\text{勾函数}, & a>0;\\ \text{飘带函数}, & a<0.\end{cases}$$

同时，一定要注意换元后**新元的取值范围**。

分母为二次，视分子次数

(a) 分子为一次：视分子为整体进行换元。 **(b) 分子为二次**：先分离常数，同时得一二次比二次。有的可以拆开，乘除掉的二次式可以进行裂项处理。下面的题就把分式的裂项思想与放缩结合起来。

例（11）.

已知数列 $A_n=\dfrac{3n^2-n-2}{2n^2+2n}$。求证：$\displaystyle\sum_{i=2}^{n}A_i>n-1+\sum_{i=2}^{n}\ln\frac{2}{i^2-1}$。

解.

先把 A_n 分离整理：

$$A_n=\frac{\frac{3}{2}(2n^2+2n)-(4n+2)}{2n^2+2n}=\frac{3}{2}-\frac{2(2n+1)}{2n(n+1)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

注意到 $b_n=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{2}{n^2-1}$，且对 $n\geq 2$ 有 $A_n\geq\dfrac{2}{n^2-1}$（$n=2$ 时取等）。于是只要证

$$\frac{2}{n^2-1}\geq 1+\ln\frac{2}{n^2-1}.$$

由 $\ln x\leq x-1$（$x>0$，$x=1$ 取等），令 $x=\dfrac{2}{n^2-1}$ 即得上式。从而对 $i=2,\dots,n$，$A_i\geq 1+\ln\dfrac{2}{i^2-1}$，且 $x=\frac{2}{i^2-1}\neq 1$ 使不等号严格，求和即

$$\sum_{i=2}^{n}A_i>\sum_{i=2}^{n}\left(1+\ln\frac{2}{i^2-1}\right)=n-1+\sum_{i=2}^{n}\ln\frac{2}{i^2-1}.$$

1.6 数形结合法

把一个 0 次式、一段距离、一个角，翻译成图上的几何量，常常一眼看出最值。下面按斜率、点点距、点线距、向量夹角、三角函数几类各举一例。

斜率

$$k=\frac{y-b}{x-a}:\ \text{即定点}(a,b)\text{ 与动点}(x,y)\text{ 连线的斜率。}$$

例（12）.

已知 $y=\dfrac{2\sin x-4}{3\cos x}$，求 y 的值域。

解.

法一（直接关联斜率）. $y=\dfrac{2\sin x-4}{3\cos x}$ 可视为定点 $(0,4)$ 与动点 $(3\cos x,2\sin x)$ 连线的斜率（$\cos x\neq 0$）。动点在椭圆 $\dfrac{X^2}{9}+\dfrac{Y^2}{4}=1$ 上，定点在椭圆外。连线的斜率的取值范围由两条切线的斜率给出（即左、右极限情况，切线斜率本身可取到）：

$$y\in\left(-\infty,-\tfrac{2}{3}\sqrt{3}\right]\cup\left[\tfrac{2}{3}\sqrt{3},+\infty\right).$$

法二（化归单位圆基本模型）. 提出系数：

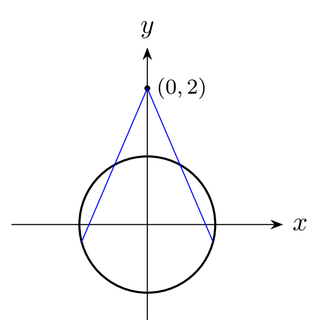
$$y=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin x-2}{\cos x}=\frac{2}{3}t,\qquad t=\frac{\sin x-2}{\cos x}.$$

t 是定点 $(0,2)$ 与单位圆上动点 $(\cos x,\sin x)$ 连线的斜率，由两条切线得

$$t\in(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty),$$

故

$$y\in\left(-\infty,-\tfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)\cup\left[\tfrac{2}{3}\sqrt{3},+\infty\right].$$



点点距离

典型特点：出现 $(a-b)^2+(c-d)^2$ 的形式。关键信息：（i）平方内作差；（ii）两平方相加。

例（13）．

已知 $x\in\mathbb{R}$，$y>0$，求 $(\cos x-y)^2+(1+\sin x-\ln y)^2$ 的最小值。

解.

由式子的形式，摆取两点：

$$(\cos x,\ 1+\sin x)\quad \text{与}\quad (y,\ \ln y).$$

前者是圆 $a^2+(b-1)^2=1$（圆心 $(0,1)$、半径 1）上的点，后者是曲线 $b=\ln a$ 上的点。研究圆上点与另一曲线相关距离的问题，通常**先把圆缩成一个点，再把圆" 还原"**：先看圆心 $(0,1)$ 到 $y=\ln x$（即 $b=\ln a$）上点的距离最小值。

可类比抛体作曲线运动时合外力与速度的关系——当 PQ 与 $b=\ln a$ 在 P 点处的切线**垂直**时，$|PQ|$ 取最小值。设切点 $(a,\ln a)$，则

$$\frac{\ln a-1}{a}\cdot\frac{1}{a}=-1 \implies a^2+\ln a-1=0 \implies a=1,$$

此方程的唯一解。于是圆心到曲线的最短距离 $|PQ|_{\min}=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$，还原半径后

$$d_{\min}=|PQ|_{\min}-1=\sqrt{2}-1,\qquad d_{\min}^2=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}.$$

点线距

绝对值直线型，二元含参。

例（14）．

已知 $P(x_0,e^{x_0})$，求 $\dfrac{|3x_0-4e^{x_0}-9|}{5}$ 的最小值。

解.

令 $y_0=e^{x_0}$，则待求式是点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $3x-4y-9=0$ 的距离

$$d=\frac{|3x_0-4y_0-9|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|3x_0-4e^{x_0}-9|}{5}.$$

P 在曲线 $y=e^x$ 上，距离最小时，$y=e^x$ 在 P 处的切线与直线平行，即切线斜率为 $\dfrac{3}{4}$：

$$y'=e^x=\frac{3}{4}\implies x_0=\ln\frac{3}{4}.$$

此时 $4e^{x_0}=3$，分子

$$|3x_0-4e^{x_0}-9|_{\min}=\left|3\ln\tfrac{3}{4}-3-9\right|=12-3\ln\tfrac{3}{4}.$$

向量夹角

$$\cos\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}.$$

例（15）．

已知约束条件 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y - 1 \leq 0 \end{cases}$ ，求 $\dfrac{2x+3y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的最小值。

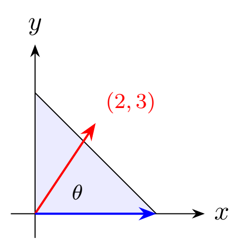
解.

令 $t = \dfrac{2x+3y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，配上模长写成夹角余弦：

$$t = \frac{2x+3y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(2,3)\cdot(x,y)}{|(x,y)|} = \sqrt{13}\cdot\frac{(2,3)\cdot(x,y)}{|(2,3)|\,|(x,y)|} = \sqrt{13}\cos\langle(2,3),(x,y)\rangle.$$

要使 t 最小，就要使 $(2,3)$ 与 (x,y) 的夹角最大。(x,y) 在三角形区域内，由图可知取 (x,y) 为 $(1,0)$ 方向时夹角最大，此时

$$t_{\min} = \frac{2\cdot 1 + 3\cdot 0}{\sqrt{1^2+0^2}} = 2.$$



三角函数（抛物线定义）

例（16）．

已知抛物线 $C: y^2 = 4x$，F 为 C 的焦点，M 为准线与 x 轴的交点，P 为 C 上一动点。当 $\dfrac{|PM|}{|PF|}$ 取得最大值时，P 恰在以 M, F 为焦点的双曲线 C' 上，求 C' 的方程。

解.

$F(1,0)$，准线 $x=-1$，$M(-1,0)$。由抛物线的定义，作 $PN \perp$ 准线，则 $|PF| = |PN|$，故

$$\frac{|PM|}{|PF|} = \frac{|PM|}{|PN|} = \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \theta = \angle PMN.$$

$\cos\theta$ 取最小值时该比值最大，即 θ 最大，此时 PM 与抛物线 C 相切。求得切点 $P(1,2)$。

于是

$$|PM| = \sqrt{(1+1)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \qquad |PF| = 2.$$

以 $M(-1,0), F(1,0)$ 为焦点，$c = 1$；又 $2a = |PM| - |PF| = 2\sqrt{2} - 2$，得 $a = \sqrt{2} - 1$，

$$a^2 = 3 - 2\sqrt{2}, \qquad b^2 = c^2 - a^2 = 2\sqrt{2} - 2.$$

所以

$$C':\ \frac{x^2}{3 - 2\sqrt{2}} - \frac{y^2}{2\sqrt{2} - 2} = 1.$$

Chapter 2

数形结合

上一章的数形结合，是把式子翻译成图上的**基础几何量**（斜率、距离、点线距、向量夹角等），具体内容已在”式子处理”一章里完整说明过。这一章换一个角度：关联图形的**几何性质**——三角不等式、对称转化、圆周角、构造三角形、米勒定理。

2.1 关联几何性质：三角不等式

三角不等式

$$\big||a|-|b|\big| \le |a\pm b| \le |a|+|b|.$$

几何上：三角形两边之和大于第三边、两边之差小于第三边；当不构成三角形（三点共线）时，可取得等号。

例（17）.

函数 $f(x)=\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{2x^2+2x+5}$，求 $f(x)$ 的值域。

解.

求导的方法就不必说了。根号里都是二次式，很容易和点点距去关联。配方：

$$f(x)=\sqrt{(x-1)^2+x^2}-\sqrt{(x-1)^2+(x+2)^2}.$$

则可提取出一个公共动点 (x,x)，它在 $y=x$ 上。把根号统一成与 (x,x) 的距离：

$$\sqrt{(x-1)^2+x^2}=\sqrt{(x-1)^2+(x-0)^2},\qquad \sqrt{(x-1)^2+(x+2)^2}.$$

另两点可以是 $(1,0),(0,1)$ 或 $(1,-2),(-2,1)$；但最好取在 $y=x$ 的**同侧**，这样距离之差容易研究。取 $A(1,0)$，$B(1,-2)$，$P(x,x)$，则

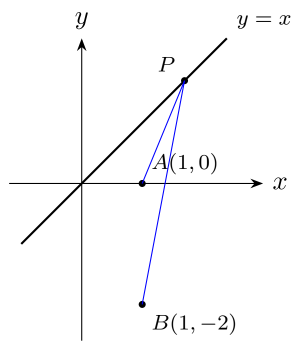
$$f(x)=|PA|-|PB|.$$

由两边之差小于（等于）第三边，$|PA|-|PB|\ge -|AB|=-2$，当 P,A,B 共线时取等，

故 $f(x)$ 的最小值为 -2。

再看两端的极限：$x \to -\infty$ 时，用极限的思想，P 沿 $y = x$ 远去，$\triangle PAB$ 趋于退化，$|PA| - |PB| \to |CA| = \sqrt{2}$（$C$ 为 A 在 $y = x$ 上的投影方向的极限位置，$K_{PA} \to 1$）；同理 $x \to +\infty$ 时 $|PA| - |PB| \to -\sqrt{2}$。$\sqrt{2}$ 只是极限、取不到。综上

$$f(x) \in [-2,\ \sqrt{2}).$$



2.2 对称转化

”将军饮马” 问题靠的是**对称转化**：把一点关于直线作对称，化折为直。圆锥曲线中的**定义转化**也是一种对称转化——把到一个焦点的距离，借椭圆/双曲线的定义换成到另一焦点的距离。

例（18）.

已知椭圆 $C : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$，$F_1, F_2$ 分别为 C 的左、右焦点，$A(-1, 1)$，P 为 C 上一动点，求 $|PA| + |PF_2|$ 的最大值。

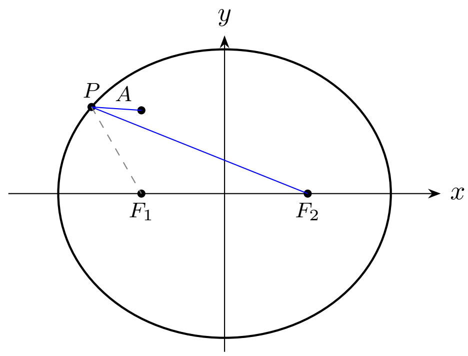
解.

圆锥曲线中，焦点成对视。直接看 $|PA| + |PF_2|$ 无法求最大值，也没把握取得最值的情况。由椭圆的定义 $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 4$，把 $|PF_2|$ 换成 $4 - |PF_1|$:

$$|PA| + |PF_2| = |PA| + 4 - |PF_1| = 4 + (|PA| - |PF_1|).$$

由三角不等式 $-|AF_1| \le |PA| - |PF_1| \le |AF_1|$，而 $A(-1, 1), F_1(-1, 0)$，$|AF_1| = 1$，故

$$(|PA| + |PF_2|)_{\max} = 4 + 1 = 5.$$



2.3 圆周角

例（19）．

> $\triangle ABC$ 中，$C=60^\circ$，$c=2$，求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值。

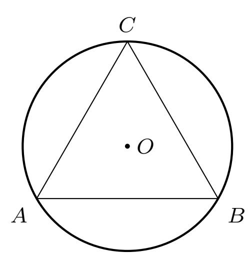
解.

$C=60^\circ$，$c=2$，即代表了圆上定弦所对的圆周角。弦长及圆周角大小均不变，故 C（弦 AB）与外接圆固定。由正弦定理

$$2R=\frac{c}{\sin C}\implies R=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

作出外接圆，知当 $CO\perp AB$ 时（C 到 AB 的高最大，即 C 在弧的" 最高" 处)，$\triangle ABC$ 的面积最大：

$$S_{\max}=\frac{1}{2}c\cdot h_{\max}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}.$$



2.4 构造三角形

例（20）．

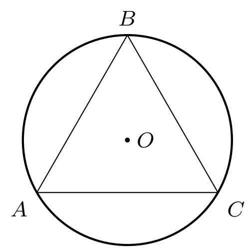
> 已知 $a>0$，$b>0$，$c>0$，且满足 $b^2=a^2+c^2-ac$，$b=2$，求 $a+c$ 的最大值。

解.

这道题有三种思路：基本不等式、万能 K 法、构造三角形。其实它和例 19 是同一题。由余弦定理逆用，$b^2=a^2+c^2-ac$ 表示在 $\triangle BAC$ 中 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{ac}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，即 $\angle B=60^\circ$，对边 $AC=b=2$。

可以证明：当 B 沿外接圆从一侧运动到 $BO\perp AC$ 的过弧中点位置时，$\triangle BAC$ 的周长和面积均在单调增加，故 $a+c$ 在 $a=c$（等腰）时最大。此时 $a^2+a^2-a^2=a^2=b^2=4$，$a=2$，

$$(a+c)_{\max}=2+2=4.$$



例（21）.

已知函数 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$，求 $f(x)$ 的最小值。

解.

化积：

$$f(x)=2\sin x+2\sin x\cos x=2\sin x(1+\cos x).$$

在课内 $\sin,\cos,\tan$ 的教法下，用的是单位圆，则 $\sin x$ 与 $\cos x$ 是" 基"、是互余的关系。把 $f(x)$ 视 x 为相位，凑成

$$f(x)=\frac{1}{2}(2\sin x)(1+\cos x),$$

恰是**圆内接三角形的面积**的形状（两邻边为 $2\sin x$ 与 $1+\cos x$、夹角为直角的等价模型）。由" 半径为 R 的圆，其内接三角形面积的最大值为 $S_{\max}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$"，这里 $R=1$，

$$f(x)_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot 1^2\cdot 2=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

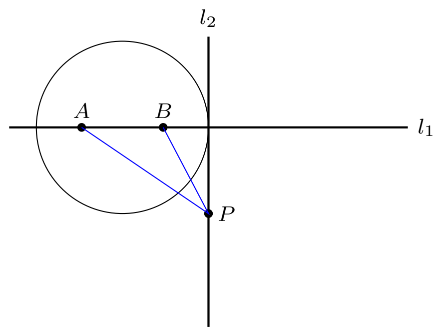
又 $f(x)$ 是奇函数，故

$$f(x)_{\min}=-f(x)_{\max}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

2.5 米勒定理

注.

米勒定理（最大视角）. 如左图，l_1 上有两定点 A, B，$l_1 \perp l_2$，P 为 l_2 上的动点。当过 A, B 的圆恰与 l_2 相切时，张角 $\angle APB$ 取得最大值。这类题不必用向量去算 $\cos\angle APB$，那样会很麻烦。



Chapter 3

恒成立与有解：分离法

含参的恒成立、有解、零点问题，常常把参数 a 单独" 剥" 出来，再去研究剩下那个不含参的函数。分两类：分离参数法（剥成 $a = f(x)$，研究 f 的值域）与分离函数法（把不等式两侧各看成一条曲线，研究它们的交点）。

3.1 分离参数法

适用于能剥成 $a = f(x)$、且 $f(x)$ 易于研究的情况。

例（22）.

> 已知 $f(x) = e^x - e^{-x} - ax$。若 $f(x) \geq 0$ 对 $x \geq 0$ 恒成立（并对称地 $f(x) \leq 0$ 对 $x \leq 0$ 恒成立），求 a 的取值范围。

解.

$x = 0$ 时 $f(0) = 0 \geq 0$ 自动成立。分离参数：

$$x > 0: \ \frac{e^x - e^{-x}}{x} \geq a; \qquad x < 0: \ \frac{e^x - e^{-x}}{x} \leq a.$$

令 $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$，则 $g(x)$ 是奇函数（$x \neq 0$）。求导：

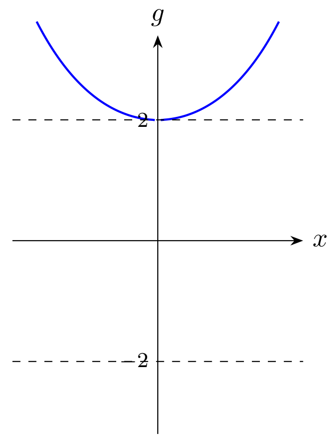
$$g'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})x - (e^x - e^{-x})}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2},$$

其中 $h(x) = x(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})$，$h(0) = 0$，$h'(x) = x(e^x - e^{-x}) > 0$（$x \neq 0$），故 h 单调递增，$x > 0$ 时 $h(x) > h(0) = 0$。于是 $g'(x) > 0$，g 在 $(0, +\infty)$ 上递增。又

$$x \to 0^+: \ g(x) \to 2, \qquad x \to 0^-: \ g(x) \to -2.$$

所以 $x > 0$ 时 $g(x) > 2$，要 $a \leq g(x)$ 恒成立须 $a \leq 2$；由奇偶性，$x < 0$ 时须 $a \geq -2$。综上

$$a \in [-2, 2].$$



3.2 分离函数法

当参数没法干净地剥成 $a = f(x)$（剥出来的函数太复杂、或与之关联的点不止一处），就把不等式两侧各看成一条曲线，研究它们的相对位置。可以分为两大类：**动直线与变开口**。

动直线

例（23）.

> 已知函数 $f(x) = e^x - a + \dfrac{a}{x}$（$x < 0$），若 $f(x) \geq 0$ 只有 1 个整数解，求 a 的取值范围。

解.

除非作出整数解恰为 1 个的分离参数后的函数 $g(x) = \dfrac{x}{x-1}e^x$ 的极值点，或与之关联的点（不止一处），太复杂了；多处出现参数 a、以及”整数解”的设定，一般用分离函数法做。

$f(x) = e^x - a + \dfrac{a}{x} \geq 0$（$x < 0$）的形式不好放，等价变形（乘以 $x < 0$，不等号翻向）：

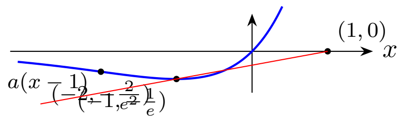
$$f(x) \geq 0 \iff xe^x \leq a(x-1) \quad (x < 0).$$

取 $M(x) = xe^x$（一条定曲线），$a(x-1)$ 是过定点 $(1, 0)$、斜率为 a 的动直线。”$xe^x \leq a(x-1)$” 即曲线 M 在动直线下方（或线上）。画出草图后知，负整数解只能是 $x = -1$（再往左不进入解集）。于是取 $M(x) = xe^x$ 上的两个特殊点

$$\left(-1, -\tfrac{1}{e}\right) \to k_1 = \frac{-\frac{1}{e} - 0}{-1-1} = \frac{1}{2e}, \qquad \left(-2, -\tfrac{2}{e^2}\right) \to k_2 = \frac{-\frac{2}{e^2} - 0}{-2-1} = \frac{2}{3e^2}.$$

要让恰好整数解只有 $x = -1$，斜率 a 须满足 $a \in (k_2, k_1]$，即

$$a \in \left(\frac{2}{3e^2}, \frac{1}{2e}\right].$$



变开口

例（24）.

设函数 $f(x)=e^{ax}-\dfrac{1}{a}\ln x$，若方程 $f(x)=0$ 有实根，求 a 的取值范围。

解.

法一（反函数法）. 由 $f(x)=0$ 得 $e^{ax}=\dfrac{\ln x}{a}$。可以发现 $y=e^{ax}$ 与 $y=\dfrac{\ln x}{a}$ 互为反函数，二者关于直线 $y=x$ 对称。要使两者有交点，只要使 $y=e^{ax}$ 与 $y=x$ 有交点即可。

随 a 的减小，$y=e^{ax}$ 变得更为”平缓”。a 为负时，$y=e^{ax}$ 递减，与 $y=x$ 必有交点。$a>0$ 时求临界：设切点 $x_0>0$，切线即 $y=x$，则

$$e^{ax_0}=x_0,\qquad ae^{ax_0}=1 \implies ax_0=1 \implies x_0=e,\ a=\frac{1}{e}.$$

故 $a>0$ 时须 $a\le\dfrac{1}{e}$（$a=\frac{1}{e}$ 时相切于 (e,e)，仍有实根）。综上

$$a\in(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{e}\right].$$

（$a=0$ 时 f 无意义，已排除。）

法二（同构法）. 把 $e^{ax}=\dfrac{\ln x}{a}$ 两边凑成同一函数 $\varphi(t)=te^t$：

$$e^{ax}=\frac{\ln x}{a} \implies ax\,e^{ax}=x\ln x=\ln x\cdot e^{\ln x}.$$

构造 $\varphi(t)=te^t$（在所需区间上单调），则 $\varphi(ax)=\varphi(\ln x)$，得 $a=\dfrac{\ln x}{x}$。而 $\dfrac{\ln x}{x}$ 的最大值为 $\dfrac{1}{e}$（$x=e$ 处），故同样

$$a\in(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{e}\right].$$

Chapter 4

比较大小

比较几个数的大小，直接比往往很难。两条常用思路：引入中介数字把它们分到不同的区间里，或者用放缩把式子放大、缩小到容易比较的形状。

4.1 引入中介数字

引入中介数字，如 0，1，$\dfrac{1}{2}$ 等，把待比较的数分到中介数字的两侧。

例（25）．

> 已知 $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$，$a = (\cos\theta)^{\sin\theta}$，$b = \log_{\cos\theta}\sin\theta$，$c = \log_{\sin\theta\cos\theta}(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$，求 a, b, c 的大小关系。

解.

$\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ 时，$0 < \sin\theta < \cos\theta < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$。以 0 和 1 作中介数字分段：

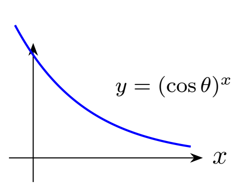
a：底 $\cos\theta \in (0,1)$、指数 $\sin\theta > 0$，故 $a = (\cos\theta)^{\sin\theta} < (\cos\theta)^0 = 1$，又 $a > 0$，所以 $a \in (0,1)$。

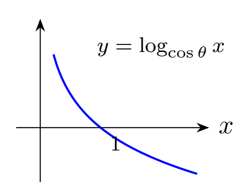
b：底 $\cos\theta \in (0,1)$、真数 $\sin\theta < \cos\theta$，故 $b = \log_{\cos\theta}\sin\theta > \log_{\cos\theta}\cos\theta = 1$，所以 $b > 1$。

c：真数 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$，故 $c = \log_{\sin\theta\cos\theta} 1 = 0$。

综上 $c = 0 < a < 1 < b$，即

$$b > a > c.$$





此类题，一般选取 0 和 1 进行区间分割。如仍无法完全比出，再选取 $\frac{1}{2}, \frac{1}{e}, e$ 等数。

4.2 放缩：三角函数解析性

例（26）.

已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x+\sin x}{x}$，求证：$f(x)<1$。

解.

$f(x)$ 直接求导（或构造 $g(x)=x-\sin x-\ln x>0$）也可以，但放缩更快。$x>0$，待证 $f(x)<1$ 等价于

$$\ln x+\sin x<x \iff \ln x<x-\sin x.$$

又 $\ln x\le x-1$（$x=1$ 取等），$\sin x\le 1$（$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 取等），相加得 $\ln x+\sin x\le (x-1)+1=x$。两式不可同时取等（$\ln x$ 在 $x=1$ 取等、$\sin x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 取等，不能同时），故

$$\ln x+\sin x<x \implies f(x)<1. \qquad \text{证毕}$$

注.

在有限长区间内，三角函数（正、余弦）往往与 0 比；在无限长区间内，三角函数往往与 ±1 比较。取 ±1 中的哪一个，要依据不等号的方向而定。三角函数本身不断振荡，会引入很多麻烦因素，去成常数后，可简化比较过程（把它一般” 放” 去）。