

初升高数学思维提升

Zircon

Contents

1	斜率 k	3
1.1	平行	3
1.2	垂直	3
2	二次函数内接直线	5
3	极限思想	7
3.1	无穷与趋近	7
3.2	有理式在无穷处的极限	8
4	切线	10
4.1	切线与曲线的交点个数	10
4.2	从变化率的角度再看切线	10
5	三角换元	12
5.1	$\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 的再定义	12
5.2	平方和为 1 的代换	12
5.3	圆的三角代换	13
5.4	直线的三角代换	13
6	角平分线	14
6.1	几何辅助线构造	14
6.2	角平分线定理	15
7	二次方程的韦达定理	16
7.1	韦达定理	16
7.2	弦长公式	16
8	圆幂定理	18
8.1	弦切角定理	18
8.2	相交弦定理	18
8.3	割线定理	19
8.4	切割线定理	19
8.5	托勒密定理	20

9 倒序相加法	21
9.1 高斯怎么算 $1 + 2 + \cdots + 99$	21
9.2 奇偶讨论的麻烦	21
9.3 倒序相加: 让每个数在”两式之间”找伴	22
10 分裂法证明——正整数 α 次方的求和	23
10.1 $\alpha = 1$	23
10.2 $\alpha = 2$	23
10.3 $\alpha = 2$ 的真正求法: 升一阶	24
10.4 类比到 $\alpha = 3$	24
11 数形结合	25
11.1 直观画图	25
11.2 两点距离	26
11.3 绝对值	27

Chapter 1

斜率 k

斜率 k 描述一条直线的**倾斜程度**。设直线与 x 轴正方向的夹角为倾斜角 α ，约定 $\alpha \in [0^\circ, 180^\circ)$ ，则

$$k = \tan \alpha, \quad \begin{cases} \alpha \neq 90^\circ, & k \text{ 存在;} \\ \alpha = 90^\circ, & k \text{ 不存在.} \end{cases}$$

直线的常用写法是 $y = kx + b$ ，其中 k 是斜率、 b 是纵截距。下面看两直线**平行**与**垂直**各对应斜率的什么关系。

1.1 平行

两直线平行

$$l_1 \parallel l_2 \iff k_1 = k_2, \underline{b_1 \neq b_2} \quad (\text{两直线不可重合}).$$

原理很直接：平行就是**倾斜角相等** ($\alpha_1 = \alpha_2$ 且 $\alpha_1, \alpha_2 \neq 90^\circ$)，倾斜角相等正切就相等，即 $k_1 = k_2$ 。这里要补上 $b_1 \neq b_2$ ，否则两条线会重合成同一条。

两直线的斜率都不存在时（都竖直），它们也平行。

1.2 垂直

两直线垂直

$$l_1 \perp l_2 \iff k_1 \cdot k_2 = -1.$$

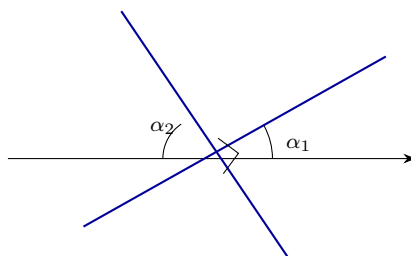
推导：设 l_1 的倾斜角为 α_1 。两线垂直时， l_2 的倾斜角比 l_1 大 90° ，即

$$\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1.$$

于是

$$\tan \alpha_2 = \tan(90^\circ + \alpha_1) = -\frac{1}{\tan \alpha_1}, \quad \text{即} \quad k_2 = -\frac{1}{k_1},$$

两边相乘即得 $k_1 k_2 = -1$ 。



注.

注意点: 当一条直线 $k = 0$ (水平), 另一条直线的斜率不存在 (竖直) 时, 两条直线也互相垂直。此时不能套 $k_1 k_2 = -1$ (一个斜率不存在), 要单独识别。

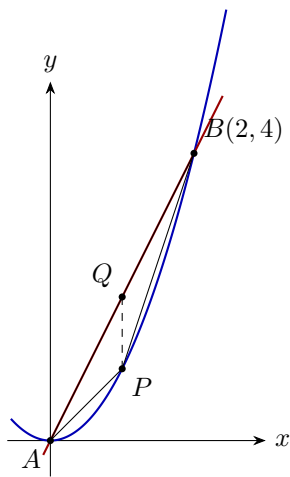
Chapter 2

二次函数内接直线

例.

已知 $y_1 = x^2$, $y_2 = 2x$, y_1 与 y_2 的交点记为 A, B 。点 P 在 y_1 上、且在 A, B 之间运动, 求 $\triangle PAB$ 的面积的最大值。

先定交点: $x^2 = 2x$ 给出 $x = 0$ 或 $x = 2$, 故 $A(0, 0)$, $B(2, 4)$ 。



解.

法一 (面积分割法). 过 P 作竖直线交弦 AB 于 Q 。以竖直线段 PQ 为分割线, 把 $\triangle PAB$ 沿 PQ 分成左右两块, 两块的“水平”底宽”合起来正好是 $|x_B - x_A|$, 于是

$$S = \frac{1}{2} |PQ| \cdot |x_B - x_A|.$$

$|x_B - x_A| = 2$ 是定值, 所以只需求出 $|PQ|$ 的最大值。

设 $x_P = p$ ($0 < p < 2$)。 P 在抛物线上, $y_P = p^2$; Q 在直线上, $y_Q = 2p$ 。竖直线段长

$$|PQ| = y_Q - y_P = 2p - p^2 = -(p - 1)^2 + 1.$$

这是开口向下的抛物线，故 $|PQ|_{\max} = 1$ ，在 $p = 1$ 处取到。于是

$$S_{\max} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

法二（从两曲线的变化率来看）. 记 $y_1 = x^2$ 的变化率为 $k_1(x) = 2x$ ， $y_2 = 2x$ 的变化率为 $k_2 = 2$ （常数）。竖直间隙 $|PQ| = y_2 - y_1$ 怎么变，取决于两条线谁涨得快：

- 若 $k_1(x) < 2$ ，则 $y_1 = x^2$ 涨得比 $y_2 = 2x$ 慢，间隙 $|PQ|$ 还在变大；
- 若 $k_1(x) > 2$ ，则 y_1 涨得更快，间隙 $|PQ|$ 开始缩小。

所以 $|PQ|$ 在 $k_1(x) = k_2$ 时取到最大。由 $2x = 2$ 得 $x = 1$ ，与法一的 $p = 1$ 一致。

Chapter 3

极限思想

3.1 无穷与趋近

无穷记作 ∞ ，分两个方向：

$$\infty : \begin{cases} +\infty, \\ -\infty. \end{cases}$$

$+\infty$ 是沿数轴向右越走越远、超过任何一个实数， $-\infty$ 则向左；二者合起来要把全体实数都包进去。

趋近记作 \rightarrow ，表示一个变量越来越靠近某个目标值。先看三个最基本的例子：

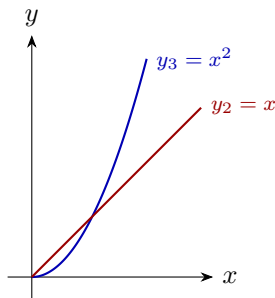
$$y_1 = \frac{1}{x} : \quad x \rightarrow 0, y \rightarrow +\infty; \quad x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0;$$

$$y_2 = x : \quad x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty; \quad y_3 = x^2 : \quad x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty.$$

y_2 和 y_3 当 $x \rightarrow +\infty$ 时都趋于 $+\infty$ 。那么是不是就有 $y_2 = y_3$ 呢？不是。同样是 $+\infty$ ，跑得^{有快有慢}—— $y_3 = x^2$ 比 $y_2 = x$ 涨得快得多，记作

$$y_3 \gg y_2.$$

所以“趋于无穷”只说明方向，还要比“谁涨得更快”。



3.2 有理式在无穷处的极限

下面四道题都是求 $x \rightarrow +\infty$ 时分式 t 的极限。同一道题往往有好几种做法，目的是让你从不同角度都能看出“谁压倒谁”。

例.

求 $t = \frac{x+1}{x+2}$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 的极限。

解.

分离常数（化为反比例）. 把分子凑出分母：

$$t = \frac{x+2-1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2}.$$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $\frac{1}{x+2} \rightarrow 0$, 故 $t \rightarrow 1$.

例.

求 $t = \frac{x^2+x+3}{x+2}$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 的极限。

解.

法一（增长速率趋近）. $x \rightarrow +\infty$ 时，分子由最高次项主导，分母也是：

$$x^2 + x + 3 = x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right) \approx x^2, \quad x + 2 \approx x,$$

故

$$t \approx \frac{x^2}{x} = x \rightarrow +\infty.$$

法二（常规换元）. 令 $m = x + 2$, 即 $x = m - 2$ ($m \neq 0$), $x \rightarrow +\infty \Rightarrow m \rightarrow +\infty$:

$$t = \frac{(m-2)^2 + (m-2) + 3}{m} = \frac{m^2 - 4m + 4 + m - 2 + 3}{m} = \frac{m^2 - 3m + 5}{m} = m - 3 + \frac{5}{m}.$$

当 $m \rightarrow +\infty$, $\frac{5}{m} \rightarrow 0$, 故 $t \rightarrow +\infty$.

例.

求 $t = \frac{x+1}{x^2+2}$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 的极限。

解.

法一 (换元). 令 $m = x + 1$, 即 $x = m - 1$, 则

$$t = \frac{m}{(m-1)^2 + 2} = \frac{m}{m^2 - 2m + 3} = \frac{1}{m - 2 + \frac{3}{m}} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow +\infty).$$

法二 (模型迁移). 取倒数:

$$\frac{1}{t} = \frac{x^2 + 2}{x + 1}.$$

这正是上一题“二次比一次”的形式, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $\frac{1}{t} \rightarrow +\infty$, 故 $t \rightarrow 0$.

法三 (增长速率趋近). 只看最高次:

$$t \approx \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \rightarrow 0.$$

例.

求 $t = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 3}$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 的极限。

解.

法一 (分离常数). 凑出分母:

$$t = \frac{2(x^2 + 2x + 3) - x - 5}{x^2 + 2x + 3} = 2 - \frac{x + 5}{x^2 + 2x + 3}.$$

余下的 $\frac{x + 5}{x^2 + 2x + 3}$ 正是上一题那种“低次比高次”的形式 (换元或看增长速率都行), 当 $x \rightarrow +\infty$ 时趋于 0, 故 $t \rightarrow 2$.

法二 (增长速率趋近). 直接比最高次:

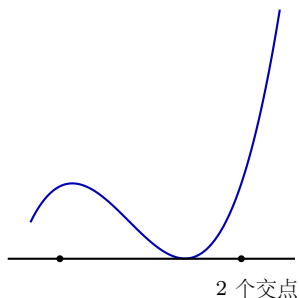
$$t \approx \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

Chapter 4

切线

4.1 切线与曲线的交点个数

初中学圆的切线时，“切线与圆只有一个公共点”。但对一般曲线，这句话不一定成立——切线与曲线的交点个数不一定是 1 个。下图里那条直线在某点与曲线相切，可在别处又穿过曲线，一共有 2 个交点：



可见“只有一个公共点”不能用来定义一般曲线的切线，得换一个刻画。

4.2 从变化率的角度再看切线

切线（变化率刻画）

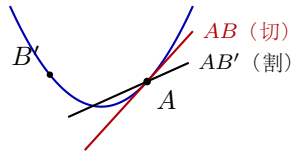
切线是过曲线上一点、且能刻画该曲线在该点变化率的直线。

也就是说，切线的斜率就是曲线在切点处的变化率（这正是后面“ $\text{导数} = \text{切线斜率}$ ”的来源）。为什么“能刻画变化率”就该是切线？可以用反证法说明。

设 l 过曲线上的点 A ，若 l 的斜率 $k_{AB'}$ 与曲线在 A 处的真实变化率 k_{AB} 不相等：

$$k_{AB'} \neq k_{AB},$$

那么 l 与曲线在 A 附近就会“岔开”，必然与曲线再相交于另一点 B' （如下图， $l = AB'$ 是穿过曲线的割线，而真正贴着曲线的是 AB 方向）。这样的 l 只是割线，从而不能成为曲线在 A 处的切线。因此切线的斜率必须等于该点的变化率。



Chapter 5

三角换元

三角换元的根基是那条最基本的恒等式

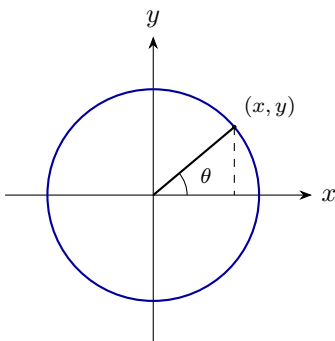
$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1.$$

凡是题目里出现”平方和”或”圆”的结构，就可以用一个角 θ 把两个变量串起来，把约束自动满足掉。

5.1 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 的再定义

在单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上取一点 (x, y) ，设它与原点连线和 x 轴正方向的夹角为 θ ，则规定

$$\cos \theta = x, \quad \sin \theta = y.$$



让 θ 沿圆周扫一圈，点 (x, y) 始终在圆上，于是 $x^2 + y^2 = 1$ 永远成立，也就反过来得到

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

这就是用几何（单位圆）重新认识 \sin, \cos 。

5.2 平方和为 1 的代换

只要看到形如

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$$

的”两个平方相加等于 1”，就把它和 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 对照：

$$\underbrace{(x-1)^2}_{\cos^2 \theta} + \underbrace{(y-2)^2}_{\sin^2 \theta} = 1 \implies \begin{cases} x-1 = \cos \theta, \\ y-2 = \sin \theta, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x = 1 + \cos \theta, \\ y = 2 + \sin \theta. \end{cases}$$

两个变量 x, y 被压缩成一个角 θ ，约束自动满足。

5.3 圆的三角代换

把上面的想法推广到一般的圆。单位圆 $x = \cos \theta, y = \sin \theta$ 经过两步变换就能覆盖任意圆：

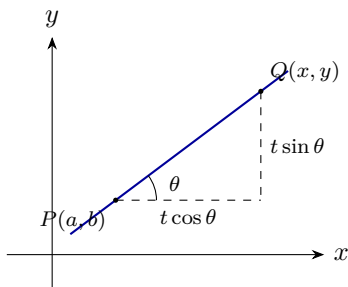
- **放缩**：半径从 1 放大到 R ，得 $(R \cos \theta, R \sin \theta)$ ；
- **平移**：圆心从 $(0, 0)$ 移到 (a, b) 。

于是圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ 上的点可写成

$$\begin{cases} x = a + R \cos \theta, \\ y = b + R \sin \theta. \end{cases}$$

5.4 直线的三角代换

直线也能用同样的”方向角”思想参数化。设直线过定点 $P(a, b)$ ，倾斜角为 θ ， $Q(x, y)$ 是线上动点、到 P 的有向距离为 t 。



把位移 t 沿 x, y 两个方向分解，得到直线的参数式

$$\begin{cases} x = a + t \cos \theta, \\ y = b + t \sin \theta. \end{cases}$$

这里 θ 是固定的（直线方向），变的是 t ；它和圆的代换形式上一致，区别只是圆里 R 固定、 θ 变，直线里 θ 固定、 t 变。

Chapter 6

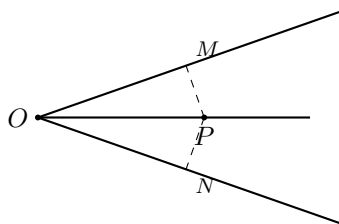
角平分线

角平分线题的关键是添辅助线，而辅助线的核心思想是凑出相似（或全等）。下面先看两种添线方式，再用面积比证角平分线定理。

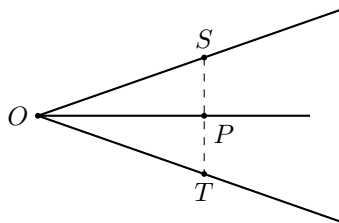
6.1 几何辅助线构造

设 OP 平分 $\angle O$ ， P 在角平分线上。

课内做法（最常见）：从 P 向角的两边各作垂线，垂足为 M, N 。由角平分线上的点到两边距离相等， $PM = PN$ ，于是 $\triangle OPM \cong \triangle OPN$ 。



课外做法：过 P 作垂直于角平分线 OP 的直线，交两边于 S, T 。因为 OP 既平分 $\angle O$ ，又垂直于 ST ，所以 $\triangle OST$ 是等腰三角形， P 是 ST 的中点（ $SP = PT$ ）。



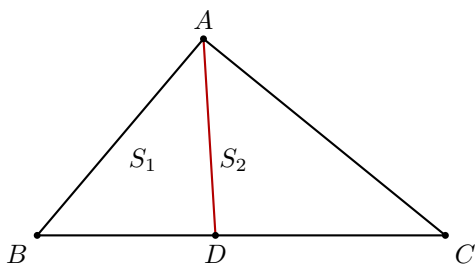
两种做法都把问题拉回到相似（全等）上——剖析到相似关系，许多角平分线问题就一通百通了。

6.2 角平分线定理

定理 6.1: 角平分线定理

在 $\triangle ABC$ 中, AD 平分 $\angle BAC$, D 在 BC 上, 则

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}.$$



证 (面积之比) .

记 $S_1 = S_{\triangle ABD}$, $S_2 = S_{\triangle ACD}$, 并设 $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$. 同一个面积比, 用两种方式数。

其一, 两个三角形都以 A 为公共顶点、夹角都是 α :

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \alpha}{\frac{1}{2} AC \cdot AD \sin \alpha} = \frac{AB}{AC}.$$

其二, $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 以 BD, DC 为底, 公用从 A 到 BC 的同一条高 h :

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} BD \cdot h}{\frac{1}{2} DC \cdot h} = \frac{BD}{DC}.$$

两式左端相同, 故 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$, 即 $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$. ■

Chapter 7

二次方程的韦达定理

7.1 韦达定理

对一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0),$$

使用前提是方程有实根，即 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ 。

韦达定理

设两实根为 x_1, x_2 ，则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

由“和”与“积”可以立刻拼出“根的差”的绝对值：

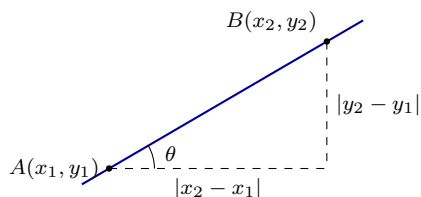
$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.$$

注.

韦达定理体现的思想是： x_1 与 x_2 的**和**、**积**、**差**这些对称关系，可以直接从系数读出来，不必先把 x_1, x_2 各自解出来。所以做题时——能不具体求根，就不求。

7.2 弦长公式

直线与曲线交于 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，要算弦长 $|AB|$ 。设直线斜率 $k = \tan \theta$ (θ 为倾斜角)。



水平投影满足 $|AB| \cos \theta = |x_2 - x_1|$, 故 $|AB| = \frac{1}{|\cos \theta|} |x_2 - x_1|$ 。又由 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 两边除以 $\cos^2 \theta$:

$$\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \implies \frac{1}{|\cos \theta|} = \sqrt{k^2 + 1}.$$

弦长公式

$$|AB| = \sqrt{k^2 + 1} |x_2 - x_1| = \sqrt{k^2 + 1} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}.$$

把交点横坐标 x_1, x_2 整体用韦达定理替换, 就不用解出交点坐标了。

例.

已知 $y_1 = x^2 + 2x + 3$ 与 $y_2 = x + 6$ 相交于 A, B 两点, 求线段 AB 的长度。

解.

联立 $x^2 + 2x + 3 = x + 6$, 即 $x^2 + x - 3 = 0$ 。由韦达定理 $x_1 + x_2 = -1$ 、 $x_1x_2 = -3$, 故

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1 + 12 = 13.$$

直线 $y = x + 6$ 斜率 $k = 1$, 代入弦长公式:

$$|AB| = \sqrt{k^2 + 1} |x_2 - x_1| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{13} = \sqrt{26}.$$

例.

已知圆 $x^2 + y^2 = 4$ 与直线 $y = x + 1$ 相交于 A, B 两点, 求线段 AB 的长度。

解.

把 $y = x + 1$ 代入 $x^2 + y^2 = 4$: $x^2 + (x + 1)^2 = 4$, 整理得 $2x^2 + 2x - 3 = 0$ 。由韦达定理 $x_1 + x_2 = -1$ 、 $x_1x_2 = -\frac{3}{2}$, 故 $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1 + 6 = 7$ 。斜率 $k = 1$:

$$|AB| = \sqrt{k^2 + 1} |x_2 - x_1| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{14}.$$

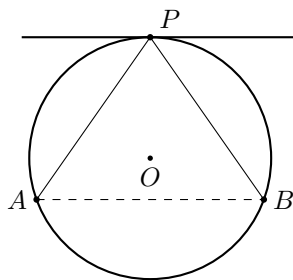
Chapter 8

圆幂定理

本章把和圆有关的几条乘积关系系统地串起来：弦切角、相交弦、割线、切割线，最后到托勒密。它们都靠相似三角形推出。

8.1 弦切角定理

过圆上一点 P 作切线，再作弦 PA 。则弦切角（切线与弦的夹角）等于它所夹的弧上的圆周角。



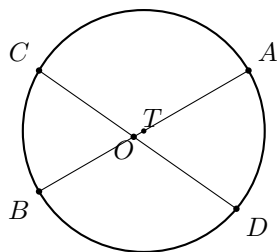
即图中切线与弦 PA 的夹角，等于弦 PA 所对的圆周角 $\angle PBA$ 。这条是后面切割线定理的“零件”。

8.2 相交弦定理

定理 8.1: 相交弦定理

两条弦 AB 与 CD 在圆内交于 T ，则

$$TA \cdot TB = TC \cdot TD.$$



证 (相似) .

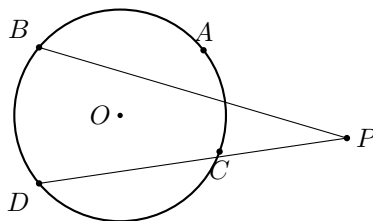
连 AC, BD (或 AD, BC)。由同弧所对圆周角相等及对顶角, $\triangle TAC \sim \triangle TDB$, 得 $\frac{TA}{TD} = \frac{TC}{TB}$, 即 $TA \cdot TB = TC \cdot TD$. ■

8.3 割线定理

定理 8.2: 割线定理

P 在圆外, 过 P 作两条割线, 分别交圆于 A, B 与 C, D , 则

$$AP \cdot PB = CP \cdot PD.$$

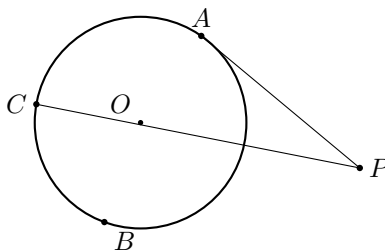


8.4 切割线定理

定理 8.3: 切割线定理

P 在圆外, PA 切圆于 A , PBC 是过 P 的割线, 则

$$PA^2 = PB \cdot PC.$$



证 (弦切角 + 相似) .

连 AB, AC 。由弦切角定理, $\angle PAB$ 等于弦 AB 所对的圆周角 $\angle ACB = \angle ACP$; 又 $\angle APB = \angle CPA$ (公共角), 故 $\triangle PAB \sim \triangle PCA$, 得 $\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PA}$, 即 $PA^2 = PB \cdot PC$ 。

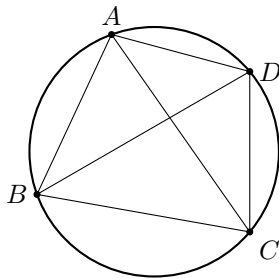
8.5 托勒密定理

定理 8.4: 托勒密定理

圆内接四边形 $ABCD$ 中,

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

(两组对边乘积之和 = 两条对角线乘积。)



证 (构造相似) .

在对角线 AC 上取点 E , 使 $\angle ABE = \angle DBC$ 。

一对相似: $\triangle ABE \sim \triangle DBC$ ($\angle ABE = \angle DBC$, 且 $\angle BAE = \angle BAC = \angle BDC$ 为同弧圆周角), 得

$$\frac{AE}{DC} = \frac{AB}{DB} \implies AB \cdot DC = AE \cdot DB.$$

另一对相似: 因 $\angle ABE = \angle DBC$, 两边同加 $\angle EBD$ 得 $\angle ABD = \angle EBC$, 又 $\angle ADB = \angle ACB = \angle ECB$ (同弧), 故 $\triangle ABD \sim \triangle EBC$, 得

$$\frac{AD}{EC} = \frac{BD}{BC} \implies AD \cdot BC = EC \cdot BD.$$

两式相加, 并注意 $AE + EC = AC$:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = (AE + EC) \cdot BD = AC \cdot BD.$$

Chapter 9

倒序相加法

9.1 高斯怎么算 $1 + 2 + \cdots + 99$

高斯小时候被老师罚算 $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99$ 。他的办法是从两端往里配对：

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 97 + 98 + 99, \quad \underbrace{1 + 99}_{100}, \underbrace{2 + 98}_{100}, \dots$$

每一组的和都是 100。从 1 到 99 配对：

$$\underbrace{1, 2, \dots, 49}_{49 \text{ 个}}, \quad \boxed{50}, \quad \underbrace{51, 52, \dots, 99}_{49 \text{ 个}}$$

正好配成 49 组、每组 100，正中间剩一个 50 落单。所以

$$S = 49 \times 100 + 50 = 4950.$$

9.2 奇偶讨论的麻烦

再看 $S' = 1 + 2 + \cdots + 99 + 100$ 。这回每组配成 101：

$$\underbrace{1 + 100}_{101}, \underbrace{2 + 99}_{101}, \dots, \underbrace{50 + 51}_{101},$$
$$\underbrace{1, 2, \dots, 50}_{50 \text{ 个}} \quad \Bigg| \quad \underbrace{51, \dots, 100}_{50 \text{ 个}}$$

恰好分成 50 组、没有落单，于是

$$S' = 50 \times 101 = 5050.$$

对比两次可以发现：**偶数个**这样的数相加，恰好两两均分；**奇数个**相加，中间那个数会落单，得单独处理。一个求和方法，竟要分奇偶两种情形——能不能避开？

9.3 倒序相加：让每个数在”两式之间”找伴

落单是因为我们在同一个式子内部给每个数找搭档。换个思路：写下两份同样的和，一份正着、一份倒着，让每个数到另一份式子里去找伴：

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + \cdots + 99, \\ S &= 99 + 98 + \cdots + 1. \end{aligned}$$

上下对齐相加，每一列都是 $1 + 99 = 100$ ，一共 99 列，所以

$$2S = 100 \times 99 \implies S = \frac{100 \times 99}{2} = 50 \times 99 = 4950.$$

这下不论项数是奇是偶，每一列都成对，干干净净，再无奇偶之分。

倒序相加（高斯求和）

把 $S = 1 + 2 + \cdots + n$ 倒着再写一份对齐相加，每列都是 $n + 1$ ，共 n 列：

$$2S = n(n + 1) \implies S = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Chapter 10

分裂法证明——正整数 α 次方的求和

要求 $1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha$ 。 $\alpha = 1$ 用上一章的倒序就够了； $\alpha \geq 2$ 则用分裂法（裂项）：把 $k^\alpha - (k-1)^\alpha$ 拆开，叠加后让低一次的和自己冒出来。

10.1 $\alpha = 1$

$S = 1 + 2 + \cdots + n$ ，同前一章分裂（倒序相加）： $S = n + (n-1) + \cdots + 1$ ，对应相加 $2S = (n+1) \cdot n$ ，故

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

10.2 $\alpha = 2$

要求 $T = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ 。我们这样想：考察相邻平方的差

$$\begin{aligned} n^2 - (n-1)^2 &= n^2 - (n^2 + 1 - 2n) = 2n - 1, \\ (n-1)^2 - (n-2)^2 &= 2n - 3 = 2(n-1) - 1, \\ &\vdots \\ 2^2 - 1^2 &= 3 = 2(2) - 1, \\ 1^2 - 0^2 &= 1 = 2(1) - 1. \end{aligned}$$

这 n 个式子，左右分别求和。左边逐项抵消（裂项相消）只剩 $n^2 - 0^2 = n^2$ ，右边是 $2(1 + 2 + \cdots + n) - n$ ：

$$n^2 = 2(1 + 2 + \cdots + n) - n \implies 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n^2 + n}{2}.$$

注意：从二次的差出发求和，结果落在了一次的求和上——左边比右边高一次，求和时高次大量相消，反倒把低一次的和“逼”了出来，而且式子更简洁。

10.3 $\alpha = 2$ 的真正求法：升一阶

上一步的教训是：要得到二次和 T ，就该从三次的差下手。照搬刚才的写法：

$$\begin{aligned} n^3 - (n-1)^3 &= 3n^2 - 3n + 1, \\ (n-1)^3 - (n-2)^3 &= 3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1, \\ &\vdots \\ 2^3 - 1^3 &= 7 = 3(2)^2 - 3(2) + 1, \\ 1^3 - 0^3 &= 1 = 3(1)^2 - 3(1) + 1. \end{aligned}$$

左右分别相加。左边裂项相消得 n^3 ；右边是 $3T - 3S + n$ ，其中 $S = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ：

$$n^3 = 3T - 3S + n.$$

代入 S 解出 T ：

$$3T = n^3 - n + \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2},$$

故

$$\boxed{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

10.4 类比到 $\alpha = 3$

同样的招数升到四次差：取 $(k+1)^4 - k^4 = f(k)$ 是关于 k 的三次式，左右分别求和，左边裂项相消、右边出现 $\sum k^3$ ，再代入已知的 $\sum k^2, \sum k$ ，即可解出

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

正好是 $1 + 2 + \cdots + n$ 的平方——立方和等于“和的平方”，形式格外漂亮。

Chapter 11

数形结合

数形结合就是把一个代数表达式翻译成几何图形，借图形的直观把答案读出来。本章看三类翻译：直接画图、化成两点距离、用数轴上的距离理解绝对值。

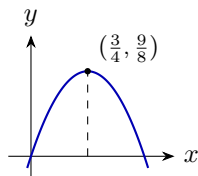
11.1 直观画图

例.

求 $y = x(3 - 2x)$ 的最大值。

解.

法一(画图). $y = -2x^2 + 3x$ 是开口向下的抛物线, 顶点处取最大. 配方 $y = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$, 故 $x = \frac{3}{4}$ 时 $y_{\max} = \frac{9}{8}$.



法二(基本不等式). 凑出和为定值:

$$y = x(3 - 2x) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (3 - 2x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2x + (3 - 2x)}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{8},$$

等号当 $2x = 3 - 2x$, 即 $x = \frac{3}{4}$ 时取到。

法三(看作关于 x 的二次方程有解). 把 y 当参数, $y = x(3 - 2x)$ 即

$$2x^2 - 3x + y = 0.$$

它要有实根 x , 须 $\Delta = 9 - 8y \geq 0$, 即 $y \leq \frac{9}{8}$, 故 $y_{\max} = \frac{9}{8}$.

11.2 两点距离

平面上点 (x, y) 到点 (a, b) 的距离满足

$$d^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2.$$

凡是表达式里出现“两个平方相加（开根号）”，都可以翻译成距离。

例.

求 $y = (x - 1)^2 + (x + 2)^2$ 的最小值。

解.

看成动点 $P(x, x)$ （在直线 $y = x$ 上）到定点 $(1, -2)$ 的距离平方 $(x - 1)^2 + (x + 2)^2$ 。它的最小值就是点 $(1, -2)$ 到直线 $y = x$ 的距离的平方：

$$y_{\min} = \left(\frac{|1 - (-2)|}{\sqrt{2}} \right)^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{9}{2}.$$

例.

求 $y = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} + \sqrt{2x^2 + 2x + 5}$ 的最小值。

解.

配方： $2x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 + x^2$ ， $2x^2 + 2x + 5 = (x + 2)^2 + (x - 1)^2$ 。于是 $y = |PA| + |PB|$ ，其中 $P(x, x)$ 在直线 $y = x$ 上， $A(1, 0)$ 、 $B(-2, 1)$ 。 A 在直线下方、 B 在上方（两点异侧），故折线拉直时最短：

$$y_{\min} = |AB| = \sqrt{(1 + 2)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{10}.$$

例.

求 $y = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} - \sqrt{2x^2 + 2x + 5}$ 的最小值。

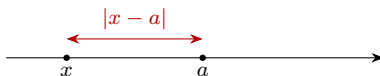
解.

仍记 $P(x, x)$ 、 $A(1, 0)$ 、 $B(-2, 1)$ ，则 $y = |PA| - |PB|$ 。要 y 最小，就要 $|PB|$ 比 $|PA|$ 超出得最多。当 $P = (1, 1)$ 时 PA 竖直、 PB 水平， $|PA| = 1$ 、 $|PB| = 3$ ，取到

$$y_{\min} = 1 - 3 = -2.$$

11.3 绝对值

回顾：数轴上 $|x - a|$ 就是点 x 到点 a 的距离。求若干绝对值之和的最小值，就是在数轴上找一点，使它到各定点的距离和最小。



例.

求 $y = |x| + |x - 1|$ 的最小值。

解.

$|x| + |x - 1|$ 是数轴上点 x 到 0 与到 1 的距离之和。当 x 落在 0 与 1 之间（含端点）时，距离和就等于两点间距 1，最小。

$$y_{\min} = 1 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

例.

求 $y = |x - 1| + |x - 2| + \cdots + |x - 9|$ 的最小值。

解.

9 个定点 $1, 2, \dots, 9$ ，奇数个，取**中位数** $x = 5$ 时距离和最小：

$$y_{\min} = (4 + 3 + 2 + 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4) = 20.$$

例.

求 $y = |x - 1| + |x - 2| + \cdots + |x - 10|$ 的最小值。

解.

10 个定点 $1, \dots, 10$ ，偶数个， x 取中间两点之间 $[5, 6]$ 的任意值时最小：

$$y_{\min} = (4 + 3 + 2 + 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 25 \quad (5 \leq x \leq 6).$$