概率（必修二部分）

Zircon

Contents

Chapter 1

概率（一）：抽样与统计量

这一讲先把统计部分串一遍：怎么抽样、频率分布直方图怎么读、几个重要参数怎么算，最后把频率和概率的关系点明。

1.1 抽样

简单随机抽样

从总体里一个一个等可能地抽。按是否把抽出的个体放回，分两类：

- **放回**：每次抽完放回去，下一次还可能抽到它；
- **不放回**：抽出来就不再放回，同一个个体最多被抽到一次。

具体操作有两种方法：

- **抽签法**；
- **随机数法**。

分层抽样

总体由几个差异明显的**层（子总体）**组成时，按各层在总体中所占的**比例**分配抽取的名额，再在每层里做简单随机抽样。这样抽到的样本结构和总体一致。

1.2 频率分布直方图

把数据分组，每组画一个小长方形。关键是：

直方图的面积就是频率

每个小长方形的**面积**（而不是高度）等于该组数据的**频率**。横轴是数据，纵轴是 $\frac{\text{频率}}{\text{组距}}$，所以面积 $=$ 组距 $\times \frac{\text{频率}}{\text{组距}} =$ 频率。所有长方形面积之和为 1。

直方图可以用来估**平均数**和**中位数**。

1.3 重要参数

- **极差** $=\max-\min$，衡量数据的跨度；
- **平均数** $\bar{x}=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$，衡量集中位置；
- **方差** $S^2=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$，衡量离散程度。

方差还有一个更好算的等价写法 $S^2=\overline{x^2}-\bar{x}^2$，推导见最后一讲的知识点补充。

1.4 频率与概率

做大量重复试验时，某事件出现的**频率**会在一个常数附近摆动，并且试验次数越多越稳定——这个稳定的常数就是该事件的**概率**，这叫**频率的稳定性**。

Chapter 2

概率（二）：随机事件与古典概型

2.1 随机事件

事件的运算

- **交事件（积事件）**：A 与 B **同时**发生，记作 $A \cap B$（或 AB）；
- **并事件（和事件）**：A、B **至少一个**发生，记作 $A \cup B$。

事件的关系

- **包含**：A 发生则 B 一定发生，记 $A \subseteq B$。特别地，$A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 时 A、B **相等**；
- **互斥**：A、B 不能同时发生，$A \cap B = \varnothing$。特别地，若还" 必有一个发生"，就是**对立**（非此即彼），$B = \bar{A}$；
- **独立**：A 发生与否不影响 B 的概率，判定式是 $P(AB) = P(A)P(B)$。

2.2 古典概型

古典概型的两个前提

- **有限性**：基本事件只有有限个；
- **等可能性**：每个基本事件发生的可能性相等。

满足这两条时，事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{A\ \text{包含的基本事件数}}{\text{总基本事件数}}.$$

所以做古典概型，核心就是**把基本事件数清楚**——常用的就是**穷举法**：把所有情形一个不漏地列出来数。

2.3 两道古典概型例题

例（例 1）．

在 $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ 这 9 个数中**不放回**地取出两个。记事件 A 为”取出的两个数中有且仅有一个为奇数”，事件 B 为”取出的两个数中有且仅有一个为偶数”。问是否有 $P(A)=P(B)$?

解.

这 9 个数里奇数有 $1,3,5,7$ 共 4 个，偶数有 $0,2,4,6,8$ 共 5 个。不放回取两个、不计顺序，总基本事件数 $C_9^2=36$。

事件 A”恰好一个奇数”就是**一奇一偶**：

$$P(A)=\frac{C_4^1C_5^1}{C_9^2}=\frac{4\times 5}{36}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}.$$

取两个数”恰好一个奇数”和”恰好一个偶数”说的是同一件事——一奇一偶，所以 A、B **本来就是同一个事件**，自然

$$P(A)=P(B)=\frac{5}{9}.$$

例（例 1 变形）．

把”不放回”改成**有放回**，其它条件不变，问是否还有 $P(A)=P(B)$?

解.

有放回取两次、分先后，总基本事件数 $9\times 9=81$。

事件 A”恰好一次取到奇数”：哪一次取奇数有 2 种，奇数 4 个、偶数 5 个，

$$P(A)=\frac{2\times 4\times 5}{81}=\frac{40}{81}.$$

同理 B”恰好一次取到偶数”也是恰好一次取奇数一次取偶数，$P(B)=\dfrac{2\times 5\times 4}{81}=\dfrac{40}{81}$。仍然

$$P(A)=P(B)=\frac{40}{81}.$$

取两次时”恰好一个奇数”与”恰好一个偶数”永远是同一件事，所以放不放回都相等。

例（例 2）．

一只器皿中装有 7 个红玻璃球、3 个绿玻璃球。从中**无放回**地任取 2 次，每次取 1 个。求：取得两个红球的概率、取得两个绿球的概率、取得两个同色球的概率、至少取得一个红球的概率。

解.

共 10 个球，无放回取两个、不计顺序，总基本事件数 $C_{10}^2 = 45$。

取得两红：

$$P(\text{两红}) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}.$$

取得两绿：

$$P(\text{两绿}) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}.$$

”两个同色”就是”两红”或”两绿”，这两个事件互斥，概率相加：

$$P(\text{同色}) = \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = \frac{8}{15}.$$

”至少一个红”的对立事件是”一个红都没有”，即”两个都是绿”，用对立事件最省事：

$$P(\text{至少一红}) = 1 - P(\text{两绿}) = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}.$$

Chapter 3

概率（三）：独立重复试验与事件独立

例（例 3）.

A、B 是治疗同一种疾病的两种药，用若干试验组做对比实验。每个试验组由 4 只小白鼠组成，其中 2 只服用 A、另外 2 只服用 B。一段时间后观察疗效：若在一个试验组中，服用 A 有效的只数**比**服用 B 有效的只数**多**，就称该试验组为**甲类组**。已知每只小白鼠服用 A 有效的概率为 $\dfrac{2}{3}$，服用 B 有效的概率为 $\dfrac{1}{2}$。

1. 求一个试验组为甲类组的概率；
2. 观察 3 个试验组，求这 3 个组中**至少有一个**甲类组的概率。

解.

设 X 为该组中服 A 有效的只数，Y 为服 B 有效的只数。X、Y 各是两次独立试验里有效的次数：

$$P(X=k)=C_2^k\left(\tfrac{2}{3}\right)^k\left(\tfrac{1}{3}\right)^{2-k},\qquad P(Y=k)=C_2^k\left(\tfrac{1}{2}\right)^2.$$

列出分布：

$$P(X=0)=\tfrac{1}{9},\quad P(X=1)=\tfrac{4}{9},\quad P(X=2)=\tfrac{4}{9};$$
$$P(Y=0)=\tfrac{1}{4},\quad P(Y=1)=\tfrac{1}{2},\quad P(Y=2)=\tfrac{1}{4}.$$

(1) 甲类组就是 $X>Y$，把所有 $X>Y$ 的情形列出来（X、Y 相互独立，概率相乘）：

$$\begin{aligned}P(X>Y)&=P(X{=}1)P(Y{=}0)+P(X{=}2)P(Y{=}0)+P(X{=}2)P(Y{=}1)\\&=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{4}+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{4}+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{36}+\frac{4}{36}+\frac{8}{36}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}.\end{aligned}$$

所以一个试验组为甲类组的概率是 $\dfrac{4}{9}$。

(2) 3 个组相互独立，”至少有一个甲类组”的对立事件是”一个甲类组都没有”：

$$P(\text{至少一个})=1-\left(1-\frac{4}{9}\right)^3=1-\left(\frac{5}{9}\right)^3=1-\frac{125}{729}=\frac{604}{729}.$$

例（例 4）.

有 6 个相同的球，分别标有数字 $1, 2, 3, 4, 5, 6$。从中**有放回**地随机取两次，每次取 1 个球。记：甲 =" 第一次取出的球的数字是 1"，乙 =" 第二次取出的球的数字是 2"，丙 =" 两次取出的数字之和是 8"，丁 =" 两次取出的数字之和是 7"。则（ ）

A. 甲、丙相互独立 B. 甲、丁相互独立

C. 乙、丙相互独立 D. 丙、丁相互独立

解.

有放回取两次、记顺序，基本事件共 $6 \times 6 = 36$ 个，等可能。先各算概率：

$$P(\text{甲}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \qquad P(\text{乙}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

和为 8 的有 $(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$ 共 5 种，和为 7 的有 $(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$ 共 6 种：

$$P(\text{丙}) = \frac{5}{36}, \qquad P(\text{丁}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

判独立就看 $P(\text{交})$ 是否等于两概率之积。

- 甲丙：第一次为 1、和为 8 需第二次为 7，不可能，$P(\text{甲} \cap \text{丙}) = 0 \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{36}$，**不独立**；
- 甲丁：只有 $(1, 6)$，$P(\text{甲} \cap \text{丁}) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(\text{甲})P(\text{丁})$，**独立**；
- 乙丙：只有 $(6, 2)$，$P(\text{乙} \cap \text{丙}) = \frac{1}{36}$，而 $P(\text{乙})P(\text{丙}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{36} = \frac{5}{216} \neq \frac{6}{216}$，**不独立**；
- 丙丁：和不能同时是 8 又是 7，$P(\text{丙} \cap \text{丁}) = 0 \neq P(\text{丙})P(\text{丁})$，**不独立**（它俩其实互斥）。

只有 B 满足 $P(AB) = P(A)P(B)$，选 $\mathbf{B}$。

Chapter 4

知识点补充

4.1 两个计数原理

数基本事件离不开两个计数原理：

分类加法计数原理

完成一件事有 n 类**互不相干**的办法，第一类有 m_1 种方法、第二类有 m_2 种……第 n 类有 m_n 种，则完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种方法。**分类用加法**（每一类都能独立完成整件事）。

分步乘法计数原理

完成一件事需要**依次**分成 n 个步骤，第一步有 m_1 种方法、第二步有 m_2 种……第 n 步有 m_n 种，则完成这件事共有

$$N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$$

种方法。**分步用乘法**（每一步都做完才算完成整件事）。

4.2 方差的简便公式

直接按定义 $S^2 = \dfrac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2$ 算要先求 $\bar{x}$、再逐项作差平方，比较费。把平方拆开能化出一个更顺手的式子：

方差 = 平方的平均 − 平均的平方

$$S^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2,$$

其中 $\overline{x^2} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ 是" 平方的平均"，$\bar{x}^2$ 是" 平均的平方"。

解.

把定义式里的平方展开：

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n}\left[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2\right] \\ &= \frac{1}{n}\left[(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)+n\bar{x}^2-2\bar{x}(\underbrace{x_1+x_2+\cdots+x_n}_{=n\bar{x}})\right] \\ &= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2+n\bar{x}^2-2n\bar{x}^2\right] \\ &= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\bar{x}^2=\overline{x^2}-\bar{x}^2. \end{aligned}$$

中间用到 $x_1+x_2+\cdots+x_n=n\bar{x}$，于是含 $\bar{x}$ 的两项合并成 $n\bar{x}^2-2n\bar{x}^2=-n\bar{x}^2$。

Chapter 5

课后练习

例（练习 1（多选））.

某次数学考试的一道多项选择题，要求是：”在每小题给出的四个选项中，全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分。”已知该选择题的正确答案是 CD，且甲、乙、丙、丁四位同学都不会做（随机猜），下列表述正确的是（　）。

A. 甲同学仅随机选一个选项，能得 3 分的概率是 $\frac{1}{2}$；

B. 乙同学仅随机选两个选项，能得 5 分的概率是 $\frac{1}{6}$；

C. 丙同学随机选择选项，能得分的概率是 $\frac{1}{5}$；

D. 丁同学随机至少选择两个选项，能得分的概率是 $\frac{1}{10}$。

解.

正确答案 CD。”得分”指得 3 分或 5 分，即所选恰是 $\{C\},\{D\},\{C,D\}$ 之一（选了正确答案、且**没选错**）；只要选了 A 或 B 就得 0 分。逐项判断：

A：仅选一个，4 种等可能。得 3 分要求”部分选对”，即选中 C 或 D，共 2 种，$P=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$。**正确**。

B：仅选两个，从 4 个里选 2 个共 $C_4^2=6$ 种。得 5 分要全选对，即恰好选中 $\{C,D\}$，1 种，$P=\frac{1}{6}$。**正确**。

C：随机选择（每个选项选或不选，至少选一个），共 $2^4-1=15$ 种。能得分的是 $\{C\},\{D\},\{C,D\}$ 共 3 种，$P=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$。**正确**。

D：至少选两个，选法有 $C_4^2+C_4^3+C_4^4=6+4+1=11$ 种。能得分的只有 $\{C,D\}$ 这 1 种（含 3 个以上必带错选），$P=\frac{1}{11}\neq\frac{1}{10}$。**错误**。

选 **ABC**。

例（练习 2）.

NBA 总决赛采用 7 场 4 胜制，2018 年总决赛两支球队分别为勇士和骑士。假设每场比赛勇士获胜的概率为 0.6、骑士获胜的概率为 0.4，且每场结果相互独立，则恰好 5 场比赛决出总冠军的概率为______。

解.

”恰好 5 场决出冠军”即某队在第 5 场拿到第 4 胜：前 4 场该队 3 胜 1 负，第 5 场该队再胜。两支队分别算、再相加（互斥）。

勇士夺冠：前 4 场 3 胜 1 负有 C_4^3 种排法，再乘第 5 场胜：

$$C_4^3(0.6)^3(0.4)\cdot 0.6 = 4\times 0.216\times 0.4\times 0.6 = 0.20736.$$

骑士夺冠：

$$C_4^3(0.4)^3(0.6)\cdot 0.4 = 4\times 0.064\times 0.6\times 0.4 = 0.06144.$$

相加：

$$P = 0.20736 + 0.06144 = 0.2688 = \frac{168}{625}.$$

例（练习 3）.

数据 $x_1, x_2, \cdots, x_8$ 的均值为 $\frac{5}{2}$，方差为 2。现增加一个数据 x_9 后方差不变，则 x_9 的可能取值为______。

解.

原来 $n=8$，$\bar{x}=\frac{5}{2}$，$S^2=2$，由方差简便公式 $S^2=\overline{x^2}-\bar{x}^2$ 反推两个和：

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 8\times\frac{5}{2} = 20, \qquad \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 8\left(S^2+\bar{x}^2\right) = 8\left(2+\frac{25}{4}\right) = 66.$$

加入 x_9 后 $n=9$，新均值 $\bar{x}'=\frac{20+x_9}{9}$，新方差仍用简便公式并令其等于 2：

$$\frac{66+x_9^2}{9} - \left(\frac{20+x_9}{9}\right)^2 = 2.$$

两边乘 81：

$$9(66+x_9^2) - (20+x_9)^2 = 162.$$

展开整理：

$$594 + 9x_9^2 - 400 - 40x_9 - x_9^2 = 162 \implies 8x_9^2 - 40x_9 + 32 = 0 \implies x_9^2 - 5x_9 + 4 = 0.$$

因式分解 $(x_9-1)(x_9-4)=0$，得

$$x_9 = 1 \quad \text{或} \quad x_9 = 4.$$