一元二次不等式

Zircon

Contents

Chapter 1

一元二次不等式（不含参）

一元二次不等式形如 $ax^2+bx+c>0$（或 $\geq, <, \leq$，$a \neq 0$）。求解的核心是**画图**：把二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的抛物线画出来，看它在 x 轴上方还是下方——这就是数形结合。

1.1 二次函数的三种表达式

二次函数表达式的选取

解题时按需要在三种形式之间切换：

- 一般式：$y=ax^2+bx+c$（$a \neq 0$）；
- 顶点式：$y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+c-\dfrac{b^2}{4a}$；
- 两根式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$（前提 $\Delta \geq 0$，即有实根）。

通常的做法：先把不等式整理成一般式，算判别式 $\Delta=b^2-4ac$，判断有没有实根。**若有根**（$\Delta \geq 0$）：

1. 先尝试因式分解（写成两根式），再数形结合读解集；
2. 分解不出来时，再用求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ 求根。

1.2 三个例子：按 Δ 的三种情形

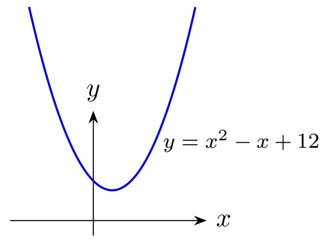
下面三题分别对应 $\Delta<0$、$\Delta>0$、$\Delta=0$，方法都是同一句话——画出抛物线，看 x 轴上下。

例.

> 解 $x^2-x+12>0$。

解.

> $a=1>0$，开口向上；$\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot12=-47<0$，无实根。抛物线整条都在 x 轴上方，y 恒正，所以不等式对一切 x 都成立。
>
> 解集 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$。

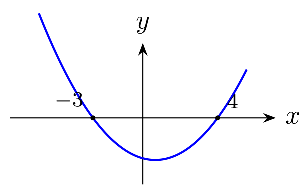


例.

> 解 $x^2-x-12>0$。

解.

> $a=1>0$，开口向上；分解 $x^2-x-12=(x+3)(x-4)$，两根 $-3,4$。$y>0$ 即图象在 x 轴上方，取两根的外侧。
>
> 解集 $(-\infty,-3)\cup(4,+\infty)$。

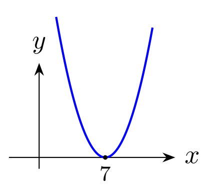


例.

> 解 $x^2-14x+49>0$。

解.

> $x^2-14x+49=(x-7)^2$，$\Delta=0$，重根 $x=7$。抛物线开口向上、与 x 轴相切于 $x=7$，除切点外恒正。$x=7$ 时 $y=0$ 不满足严格不等式。
>
> 解集 $\{x\mid x\neq7\}=(-\infty,7)\cup(7,+\infty)$。



Chapter 2

逆写系数法与穿根法

2.1 逆写系数法

遇到首项系数很大、常数项很小的二次式，直接十字相乘不好凑。可以用**逆写系数**把它换成一个系数更顺手的方程来求根。

逆写系数：倒根等价

方程

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)\quad (①)\qquad 与 \qquad cx^2+bx+a=0\ (c\neq 0)\quad (②)$$

互为**倒根**。理由：对 ② 两边同除 x^2，得 $a\dfrac{1}{x^2}+b\dfrac{1}{x}+c=0$；令 $t=\dfrac{1}{x}$，就变回 $at^2+bt+c=0$，正是 ①。所以 ② 的根都是 ① 的根的倒数。

例.

解 $12x^2+x-1>0$。

解.

把系数逆写：$12x^2+x-1$ 对应方程 $12x^2+x-1=0$，它的倒根方程是 $-x^2+x+12=0$，即

$$x^2-x-12=0 \implies (x+3)(x-4)=0,\qquad x=-3,\ 4.$$

取倒数，得 $12x^2+x-1=0$ 的两根 $x=-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{4}$，即

$$12x^2+x-1=(3x+1)(4x-1).$$

$a=12>0$，开口向上，$y>0$ 取两根外侧：

$$解集=\left(-\infty,-\tfrac{1}{3}\right)\cup\left(\tfrac{1}{4},+\infty\right).$$

这里逆写出来的 x^2-x-12 正是前面解过的同一个二次式——逆写系数把一个”大系数”的二次不等式拉回到了熟悉的”小系数”二次不等式上。

2.2 穿根法

二次不等式的图象法可以直接推广到**高次**：把多项式分解成一串一次因式的乘积，在数轴上一次性读出符号。这就是穿根法（数轴标根法）。

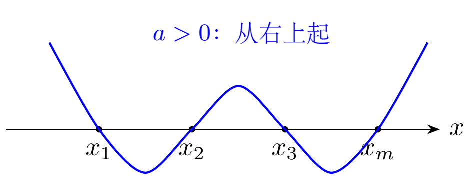
穿根法

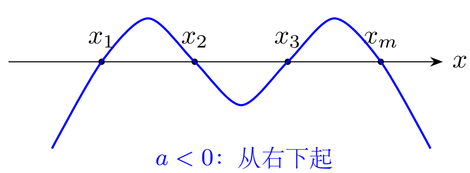
记 $y_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$。若它能写成

$$y_n = a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m), \qquad x_1 < x_2 < \cdots < x_m,$$

（其中 a 可以是常数，也可以是常数乘上恒正或恒负的式子，例如 $a = 2(x^2+x+1)(x^2+2x+5)$ 恒正），就能用穿根法求 $y_n > 0$ 或 $y_n < 0$ 的解：

1. 把 m 个根 $x_1, \ldots, x_m$ 由小到大标在数轴上；
2. $a > 0$ 从最右端的**上方**起笔往下穿，$a < 0$ 从最右端的**下方**起笔往上穿；
3. **奇重根穿过、偶重根不穿**（碰到偶重根弹回去）；
4. 曲线在 x 轴上方就是 $y > 0$，下方就是 $y < 0$。





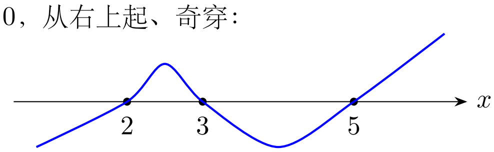
举几个例子

例.

$y = (x-2)(x-3)(x-5)$。

解.

三个单根 $2, 3, 5$，$a > 0$，从右上起、奇穿：



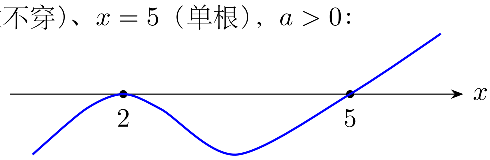
$y > 0 \;\Rightarrow\; 2 < x < 3$ 或 $x > 5$；　　$y < 0 \;\Rightarrow\; x < 2$ 或 $3 < x < 5$。

例.

$y=(x-2)^2(x-5)$。

解.

根 $x=2$（二重，偶次不穿）、$x=5$（单根），$a>0$：



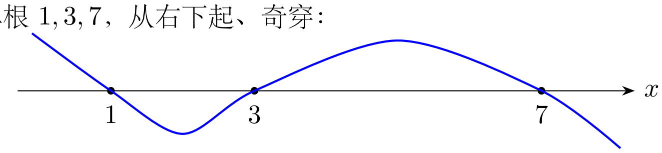
$x=2$ 处弹回去（两侧都在 x 轴下方）。$y>0 \;\Rightarrow\; x>5$；　　$y<0 \;\Rightarrow\; x<2$ 或 $2<x<5$。

例.

$y=(1-x)(x-3)(x-7)$。

解.

先把每个因式 x 的系数化为正：$1-x=-(x-1)$，于是 $y=-(x-1)(x-3)(x-7)$，$a<0$。三个单根 $1,3,7$，从右下起、奇穿：



$y>0 \;\Rightarrow\; x<1$ 或 $3<x<7$；　　$y<0 \;\Rightarrow\; 1<x<3$ 或 $x>7$。

注.

方法总结

1. 判 a 的正负，定穿根的起始方向（$a>0$ 右上、$a<0$ 右下）；

2. 奇穿偶不穿；

3. y 正取上、y 负取下。

Chapter 3

分式不等式

分式不等式的未知数在分母上。**不能直接两边乘分母**——分母的正负不知道，乘上去不等号方向就定不下来。

3.1 利用完全平方数的非负性

一个干净的办法：两边同乘分母的**平方** g^2。因为 $g^2 \geq 0$（且只要 $g \neq 0$ 就 $g^2 > 0$），乘上去不会翻转不等号，分式就化成了多项式。

例.

解 $\dfrac{x-1}{x+1} < 0$。

解.

两边同乘 $(x+1)^2$（严格不等式本身已要求 $x+1 \neq 0$）：

$$\frac{x-1}{x+1} < 0 \iff \frac{x-1}{x+1}(x+1)^2 < 0 \iff (x-1)(x+1) < 0.$$

两根 $-1, 1$，开口向上，” 小于取中间”：

$$\text{解集} = (-1, 1).$$

例.

解 $\dfrac{x+3}{x-2} \leq 0$。

解.

同乘 $(x-2)^2$，但分母不能为零，要单独排除 $x = 2$：

$$\frac{x+3}{x-2} \leq 0 \iff (x+3)(x-2) \leq 0 \text{ 且 } x \neq 2.$$

$(x+3)(x-2) \le 0$ 取中间 $-3 \le x \le 2$，再去掉 $x = 2$：

$$解集 = [-3, 2).$$

3.2 右边不是 0：先通分

如果不等式右边不是 0，先**移项通分**，把一侧化成 0、另一侧化成一个分式，再按上面处理。

例.

解 $\dfrac{x-5}{x+4} \ge 1$。

解.

移项通分，使右边为 0：

$$\frac{x-5}{x+4} - 1 \ge 0 \iff \frac{(x-5)-(x+4)}{x+4} \ge 0 \iff \frac{-9}{x+4} \ge 0.$$

分子 $-9 < 0$ 是常数，要让分式 ≥ 0，只能让分母 $x+4 < 0$（负除以负为正；$x+4$ 不能为零）：

$$解集 = (-\infty, -4).$$

注.

方法总结

1. 先通分，令一侧为 0；
2. 再消去分母（同乘分母的平方），并**注意分母本身不能为** 0。