

# 立体几何证明

Zircon

# Contents

<b>1</b>	<b>回归教材</b>	<b>2</b>
1.1	基本概念与表示方法	2
1.2	公理与推论	2
1.3	三类位置关系	3
<b>2</b>	<b>平行关系</b>	<b>4</b>
2.1	直线之间 (线线平行)	4
2.2	线面平行	5
2.3	面面平行	5
<b>3</b>	<b>垂直关系</b>	<b>6</b>
3.1	直线之间 (线线垂直)	6
3.2	线面垂直	6
3.3	面面垂直	7
3.4	补充	8
<b>4</b>	<b>空间角、距离与向量</b>	<b>9</b>
4.1	基本概念补充: 三类角	9
4.2	几类距离	10
4.3	空间向量	10
<b>5</b>	<b>例题</b>	<b>12</b>
5.1	例 1: 平行四边形折起后的平行、垂直与线面角	12
5.2	例 2: $PD \perp$ 底面的矩形棱锥	13
5.3	例 3: $\angle PBA = \angle PBC = 60^\circ$ 的矩形棱锥	14
5.4	例 4: $PA \perp$ 底面矩形的线面平行、垂直与体积	15
5.5	例 5: 三棱锥中的动点线面角	16
5.6	例 6: 矩形沿 $AE$ 翻折	17
5.7	例 7: 大兴机场——多面体的离散曲率	18

# Chapter 1

## 回归教材

立体几何证明题靠的不是凭空想象，而是把图里的条件翻译成判定定理用得上的形式。所以第一步是回归教材：把基本概念、公理、推论和各种位置关系先理顺，做题时才知道每一步在调用哪条定理。

### 1.1 基本概念与表示方法

#### 基本概念

点；线（点构成的集合）；面（点或线构成的集合）。

#### 基本表示方法

点  $A$  在直线  $l$  上：  $A \in l$ ；      在平面  $\alpha$  内：  $A \in \alpha$ 。

直线  $l$  在平面  $\alpha$  内：  $l \subset \alpha$ 。

### 1.2 公理与推论

#### 公理

1. 不共线的三点确定一个平面；
2. 若一条直线上的两个点在一个平面内，则此直线在这个平面内；
3. 若两个不重合的平面有一个公共点，则它们有且只有一条过该点的公共直线。

由公理推出三条常用推论——平时“确定一个平面”最常用的依据：

#### 推论

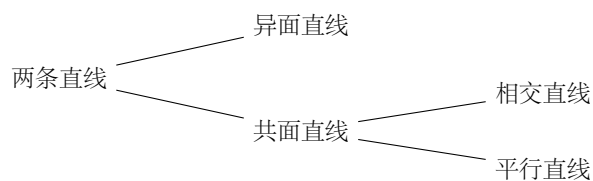
1. 经过一条直线和这条直线外一点，有且只有一个平面；

2. 经过两条相交直线，有且只有一个平面；
3. 经过两条平行直线，有且只有一个平面。

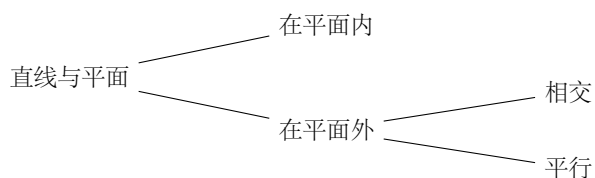
### 1.3 三类位置关系

把空间里直线、平面的相对位置分类清楚，是后面判定平行、垂直的前提。

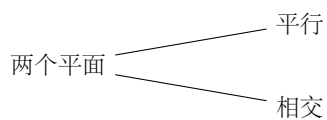
两条直线的位置关系：



直线与平面的位置关系：



两个平面的位置关系：



后面两章就围绕”平行”和”相交（垂直）”这两类关系，把线线、线面、面面三个层次的判定与性质串起来。

## Chapter 2

# 平行关系

平行分三层：线线平行、线面平行、面面平行。三层之间靠判定定理（往下走，把“线线”逐级推到“面面”）和性质定理（往上走，再逐级退回来）来回转换。下面把每一层常用的来源列清楚。

### 2.1 直线之间（线线平行）

#### 线线平行的来源

(i) 平面几何证法：平行四边形、平行线分线段成比例  $\Rightarrow$  等角定理；

(ii) 平行的传递性；

$$(iii) \begin{cases} l_1 \parallel \alpha \\ \alpha \cap \beta = l_2 \\ l_1 \subset \beta \end{cases} \Rightarrow l_1 \parallel l_2;$$

$$(iv) \begin{cases} \alpha \parallel \beta \\ \gamma \cap \alpha = l_1 \\ \gamma \cap \beta = l_2 \end{cases} \Rightarrow l_1 \parallel l_2;$$

$$(v) \begin{cases} l_1 \perp \alpha \\ l_2 \perp \alpha \end{cases} \Rightarrow l_1 \parallel l_2;$$

$$(vi) \begin{cases} l_1 \perp \alpha \\ l_2 \perp \beta \\ \alpha \parallel \beta \end{cases} \Rightarrow l_1 \parallel l_2.$$

## 2.2 线面平行

### 线面平行的来源

$$(i) \begin{cases} l_1 \parallel l_2 \\ l_1 \not\subset \alpha \\ l_2 \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow l_1 \parallel \alpha \text{ (判定定理: 面外的线平行于面内的线);}$$

$$(ii) \begin{cases} l_1 \perp \beta \\ \alpha \perp \beta \\ l_1 \not\subset \alpha \end{cases} \Rightarrow l_1 \parallel \alpha;$$

$$(iii) \begin{cases} \alpha \parallel \beta \\ l \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow l \parallel \beta.$$

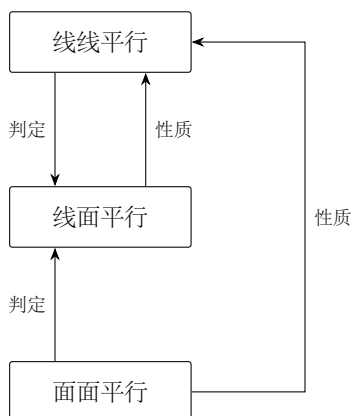
## 2.3 面面平行

### 面面平行的来源

$$(i) \begin{cases} a \parallel \alpha, a \subset \beta \\ b \parallel \alpha, b \subset \beta \\ a \cap b = P \end{cases} \Rightarrow \beta \parallel \alpha \text{ (判定定理: 一个面内两条相交直线都平行于另一个面);}$$

$$(ii) \begin{cases} l \perp \alpha \\ l \perp \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha \parallel \beta.$$

三层之间的判定与性质，可以画成一张通路图：判定定理（右侧）从上往下把“线线”推到“面面”，性质定理（左侧）从下往上退回来。



## Chapter 3

# 垂直关系

垂直关系和平行关系一样，也分线线、线面、面面三层。三层之间靠判定定理（往下走）和性质定理（往上走）来回转换。下面把每一层常用的来源列清楚，标 ▲ 的是判定定理。

### 3.1 直线之间（线线垂直）

#### 线线垂直的来源

- (i) 平面几何证法：矩形、等腰三角形的”三线合一”；
- (ii) 利用平行的传递性；
- (iii) ▲  $\begin{cases} l_1 \perp \alpha \\ l_2 \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow l_1 \perp l_2;$
- (iv)  $\begin{cases} l_1 \perp \alpha \\ l_2 \parallel \alpha \end{cases} \Rightarrow l_1 \perp l_2.$

(iii) 是最常用的一条：一条直线只要垂直于一个平面，就垂直于这个平面内的每一条直线。所以证线线垂直，往往先去证一条线面垂直，再”反推”下来。

### 3.2 线面垂直

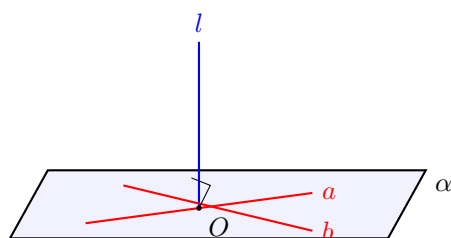
#### 线面垂直的来源

- (i) ▲  $\begin{cases} l \perp a \\ l \perp b \\ a \cap b = O \\ a, b \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow l \perp \alpha$  (判定定理：垂直于面内两条相交直线)；

$$(ii) \begin{cases} \alpha \perp \beta \\ \alpha \cap \beta = l_1 \\ l_2 \subset \alpha \\ l_2 \perp l_1 \end{cases} \Rightarrow l_2 \perp \beta;$$

$$(iii) \begin{cases} l \perp \alpha \\ \alpha \parallel \beta \end{cases} \Rightarrow l \perp \beta.$$

判定定理 (i) 里, **相交**是关键——只垂直于两条平行线推不出线面垂直。(ii) 是面面垂直最常用的“用法”: 有了面面垂直, 就在一个面内作交线的垂线, 立刻得到一条线面垂直。



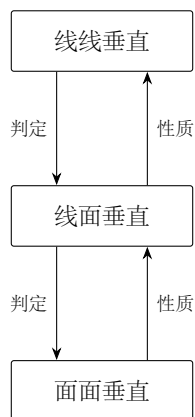
### 3.3 面面垂直

#### 面面垂直的来源

$$(i) \blacktriangle \begin{cases} l \perp \alpha \\ l \subset \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha \perp \beta \text{ (判定定理: 一个面过另一个面的垂线);}$$

$$(ii) \begin{cases} \alpha \perp \beta \\ \alpha \parallel \gamma \end{cases} \Rightarrow \beta \perp \gamma.$$

三层之间的判定与性质, 同样可以画成一张通路图: 判定从上往下, 性质从下往上。



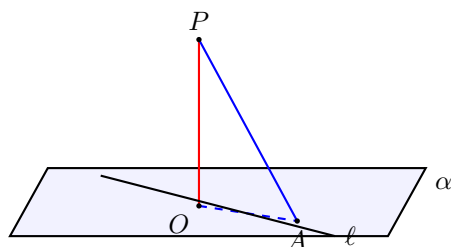
## 3.4 补充

### 1. 三垂线定理

#### 三垂线定理

设  $P$  为平面  $\alpha$  外一点,  $PO \perp \alpha$  ( $O$  为垂足),  $l$  为  $\alpha$  内一条直线。若  $OA \perp l$  ( $A$  在  $l$  上), 则  $PA \perp l$ 。

逆定理: 若  $PA \perp l$ , 则  $OA \perp l$ 。



它把”斜线  $PA$  与  $l$  的垂直”换成平面内”射影  $OA$  与  $l$  的垂直”——平面内的垂直好判断得多。

### 2. 面面平行的简单判定

#### 面面平行的简单判定

$$\begin{cases} l \perp \alpha \\ l \perp \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha \parallel \beta: \text{垂直于同一条直线的两个平面互相平行。}$$

这是用垂直来证平行的一条捷径——只要找到一条直线同时垂直于两个面, 两个面就平行。

## Chapter 4

# 空间角、距离与向量

线、面理顺之后，还要会算空间里的“角”和“距离”。这一章把三类角、几类距离的定义列清楚，再交代空间向量法——后面综合题里求角、求距离基本都靠它。

### 4.1 基本概念补充：三类角

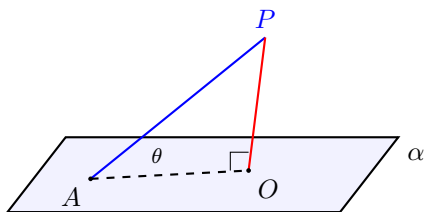
#### 线线角

两条异面直线所成的角  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$ 。把两条线平移到相交，取所成的锐角（或直角）。

#### 线面角

直线  $l$  与平面  $\alpha$  所成的角  $\theta$ ,  $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$ 。

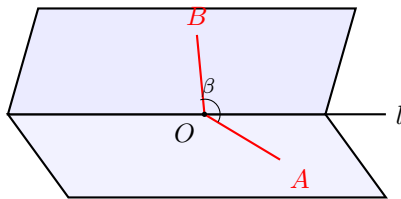
找角的方法：在  $l$  上取一点  $P$ ，作  $PO \perp \alpha$  ( $O$  为垂足)， $A$  为  $l$  与  $\alpha$  的交点，则  $\theta = \angle PAO$  (斜线与它在面内射影所成的角)。



#### 面面角（二面角，即两平面的夹角）

二面角  $\beta$ ,  $\beta \in [0^\circ, 180^\circ]$ 。

找角的方法：在棱  $l$  上取一点  $O$ ，在两个半平面内分别作  $OA \perp l$ 、 $OB \perp l$ ，则  $\beta = \angle AOB$ 。



## 4.2 几类距离

### 常用的距离

- 平行平面间的距离;
- 异面直线间的距离。

## 4.3 空间向量

立体几何里许多“找角、找距离”都可以不靠纯几何，而是建系、用向量算。下面是空间向量的几条主线，每一条都把一个几何对象翻译成可计算的代数形式：

### 空间向量的几条主线

- 直线的方向向量  $\Rightarrow$  空间中的直线方程;
- 共面向量的表示  $\Rightarrow$  三点共面的判定;
- 法向量的求作  $\Rightarrow$  平面的点法式方程;
- 向量内积求距离  $\Rightarrow$  点到平面的距离。

具体到求角，三类角都有统一的向量公式：

### 向量法求三类角

设  $\vec{a}, \vec{b}$  为两直线的方向向量， $\vec{n}, \vec{n}_1, \vec{n}_2$  为平面的法向量。

- 线线角  $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$ :  $\cos \theta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ ;
- 线面角  $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$ :  $\sin \theta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| |\vec{n}|}$ ;
- 二面角  $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$ :  $\cos \theta = \pm \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$ ，正负由图判断（锐角还是钝角）。

### 法向量的求法

设平面  $\alpha$  由两个不共线向量  $\vec{u}, \vec{v}$  张成, 令  $\vec{n} = (x, y, z)$ , 由

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$

解出一组非零解即可 (通常先令某个分量为 1)。

### 点到平面的距离

平面  $\alpha$  的法向量为  $\vec{n}$ ,  $A$  为  $\alpha$  内一点,  $P$  为空间任一点, 则  $P$  到  $\alpha$  的距离

$$d = \frac{|\vec{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}.$$

二面角的向量公式末尾那个  $\pm$  一定要按图判断, 不能像线线角、线面角那样直接加绝对值——因为二面角可以是钝角。

## Chapter 5

### 例题

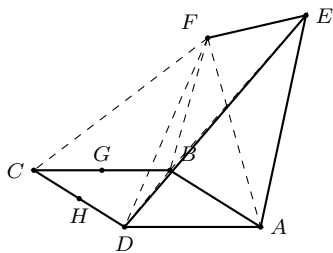
下面七道题都是立体几何证明与求角的常见类型：平行四边形折起、矩形棱锥、动点线面角、矩形翻折，最后一道是大兴机场背景的离散曲率题。做题时回到前面几章——证平行、垂直就调用判定与性质定理，求角、求距离就建系用向量。

#### 5.1 例 1：平行四边形折起后的平行、垂直与线面角

例.

如图，四边形  $ABCD$  是平行四边形，平面  $AED \perp$  平面  $ABCD$ ， $EF \parallel AB$ ， $AB = 2$ ， $BC = EF = 1$ ， $AE = \sqrt{6}$ ， $DE = 3$ ， $\angle BAD = 60^\circ$ ， $G$  为  $BC$  的中点， $H$  为  $CD$  的中点。

1. 求证：平面  $FGH \parallel$  平面  $BED$ ；
2. 求证： $BD \perp$  平面  $AED$ ；
3. 求直线  $EF$  与平面  $BED$  所成角的正弦值。



解.

先把底面的边算清楚。平行四边形  $ABCD$  中  $AD = BC = 1$ ， $AB = 2$ ， $\angle BAD = 60^\circ$ ，由余弦定理

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cos 60^\circ = 4 + 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 3,$$

故  $BD = \sqrt{3}$ 。又  $AD^2 + BD^2 = 1 + 3 = 4 = AB^2$ ，所以  $\angle ADB = 90^\circ$ ，即  $BD \perp AD$ 。

(1)  $G$  为  $BC$  中点、 $H$  为  $CD$  中点, 所以  $GH \parallel BD$  (中位线)。  $F$  为  $AE$  中点 (由  $EF \parallel AB$  且  $EF = \frac{1}{2}AB$ , 结合图形  $F$  是  $AE$  中点)、 $H$  为  $CD$  中点, 可证  $FH \parallel ED$ 。  $GH \cap FH = H$ ,  $BD \cap ED = D$ , 由面面平行判定定理, 平面  $FGH \parallel$  平面  $BED$ 。

(2) 平面  $AED \perp$  平面  $ABCD$ , 交线为  $AD$ ;  $BD \subset$  平面  $ABCD$  且  $BD \perp AD$ 。由面面垂直的性质定理,  $BD \perp$  平面  $AED$ 。

(3) 以  $D$  为原点,  $DA$  为  $x$  轴、 $DB$  为  $y$  轴 (已证  $DA \perp DB$ ), 竖直向上为  $z$  轴建系。则

$$D = (0, 0, 0), \quad A = (1, 0, 0), \quad B = (0, \sqrt{3}, 0).$$

平面  $AED \perp$  底面且交线为  $AD$ , 所以  $E$  在  $xz$  平面内, 设  $E = (x, 0, z)$ 。由  $DE = 3$ ,  $AE = \sqrt{6}$ :

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 9 \\ (x-1)^2 + z^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow x = 2, z = \sqrt{5},$$

即  $E = (2, 0, \sqrt{5})$ 。  $EF \parallel AB$ , 故  $\vec{EF}$  与  $\vec{AB} = (-1, \sqrt{3}, 0)$  同向, 可直接用  $\vec{AB}$  作方向向量。

平面  $BED$  过原点, 由  $\vec{DB} = (0, \sqrt{3}, 0)$ 、 $\vec{DE} = (2, 0, \sqrt{5})$  求法向量:

$$\vec{n} = \vec{DB} \times \vec{DE} = (\sqrt{15}, 0, -2\sqrt{3}).$$

于是

$$\sin \theta = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{AB}| |\vec{n}|} = \frac{|-\sqrt{15}|}{2 \cdot \sqrt{15+12}} = \frac{\sqrt{15}}{2 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{6}.$$

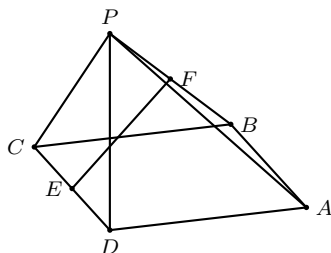
故  $EF$  与平面  $BED$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{5}}{6}$ 。

## 5.2 例 2: $PD \perp$ 底面的矩形棱锥

例.

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PD \perp$  平面  $ABCD$ , 底面  $ABCD$  是矩形,  $AD = PD$ ,  $E$ 、 $F$  分别是  $CD$ 、 $PB$  的中点。

1. 求证:  $EF \perp$  平面  $PAB$ ;
2. 设  $AB = \sqrt{3}BC = 3$ , 求三棱锥  $P-AEF$  的体积。



解.

(1) 取  $AB$  的中点  $G$ , 连  $EG$ 、 $FG$ 。

- $F$ 、 $G$  分别为  $PB$ 、 $AB$  的中点, 由中位线  $FG \parallel PA$ 。
- $E$ 、 $G$  分别为  $CD$ 、 $AB$  的中点, 矩形里  $EG \parallel AD$  且  $EG = AD$ 。

下面证  $EF$  同时垂直于平面  $PAB$  内两条相交直线  $AB$ 、 $PB$ 。

其一, 记  $AD = PD = a$ 。  $PD \perp$  底面  $\Rightarrow PD \perp DC$ , 又矩形  $\Rightarrow AD \perp DC$ , 故  $DC \perp$  平面  $PAD$ , 从而  $DC \perp PA$ ; 这说明  $\triangle PAB$  里  $PA \perp AB$  ( $AB \parallel DC$ )。再由  $FG \parallel PA$  得  $FG \perp AB$ ; 而  $EG \parallel AD \perp AB$ , 故  $AB \perp$  平面  $EFG$ , 于是  $AB \perp EF$ 。

其二,  $PE = BE$ : 在  $\triangle PDE$  与  $\triangle BCE$  中,  $PD = AD = BC$ 、 $DE = CE$ 、两个直角, 故  $PE = BE$ ,  $\triangle PEB$  是等腰三角形;  $F$  为底边  $PB$  中点, 所以  $EF \perp PB$ 。

$AB \cap PB = B$ , 故  $EF \perp$  平面  $PAB$ 。

(2) 由  $AB = \sqrt{3}BC = 3$  得  $AB = 3$ 、 $BC = \sqrt{3}$ , 于是  $AD = BC = \sqrt{3}$ 、 $PD = AD = \sqrt{3}$ 、 $DC = AB = 3$ 。以  $D$  为原点建系:

$$D = (0, 0, 0), A = (\sqrt{3}, 0, 0), B = (\sqrt{3}, 3, 0), C = (0, 3, 0), P = (0, 0, \sqrt{3}),$$

则  $E = (0, \frac{3}{2}, 0)$ ,  $F = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 。三棱锥  $P-AEF$  的体积

$$V = \frac{1}{6} \left| (\vec{PA}) \cdot (\vec{PE} \times \vec{PF}) \right| = \frac{3}{4}.$$

故  $V_{P-AEF} = \frac{3}{4}$ 。

### 5.3 例 3: $\angle PBA = \angle PBC = 60^\circ$ 的矩形棱锥

例.

如图, 四棱锥  $P-ABCD$  的底面  $ABCD$  为矩形,  $E$  是边  $AD$  上的点,  $PA = AB = AE = 2DE$ ,  $\angle PBA = \angle PBC = 60^\circ$ 。

1. 求证: 平面  $PBE \perp$  平面  $ABCD$ ;
2. 求直线  $PC$  和平面  $PBD$  所成角的正弦值。

解.

取  $DE = 1$ , 则  $AE = 2$ 、 $AD = AE + ED = 3$ 、 $PA = AB = 2$ 、 $BC = AD = 3$ 。

(1) 先求  $PB$ 。在  $\triangle PAB$  中  $PA = AB = 2$ ,  $\angle PBA = 60^\circ$ , 由余弦定理  $PA^2 = PB^2 + AB^2 - 2PB \cdot AB \cos 60^\circ$ , 解得  $PB = 2$ 。

底面里  $AB = AE = 2$ 、 $\angle BAE = 90^\circ$ , 故  $\triangle ABE$  是等腰直角三角形,  $BE = 2\sqrt{2}$ 。可算得  $PE = 2$  (由  $PB = 2$ 、 $\angle PBC = 60^\circ$  与矩形条件), 于是  $\triangle PBE$  也等腰。

取  $BE$  中点  $F$ , 连  $PF$ 、 $AF$ 。等腰  $\triangle PBE$  中  $PF \perp BE$ , 等腰直角  $\triangle ABE$  中  $AF \perp BE$ , 且  $AF = PF = \sqrt{2}$ 。又  $PA = 2$ , 而  $AF^2 + PF^2 = 2 + 2 = 4 = PA^2$ , 故  $\angle AFP = 90^\circ$ , 即  $PF \perp AF$ 。 $PF$  同时垂直于  $BE$ 、 $AF$ , 且  $BE \cap AF = F$ , 所以  $PF \perp$  平面  $ABCD$ 。 $PF \subset$  平面  $PBE$ , 由面面垂直判定定理, 平面  $PBE \perp$  平面  $ABCD$ 。

(2) 以  $A$  为原点,  $AB$ 、 $AD$  为  $x$ 、 $y$  轴, 竖直向上为  $z$  轴建系:

$$A = (0, 0, 0), B = (2, 0, 0), C = (2, 3, 0), D = (0, 3, 0), E = (0, 2, 0).$$

由  $PA = PB = PE = 2$  解得  $P = (1, 1, \sqrt{2})$  (恰在  $BE$  中点正上方, 与 (1) 一致)。则  $\vec{PC} = (1, 2, -\sqrt{2})$ 。

平面  $PBD$ :  $\vec{BP} = (-1, 1, \sqrt{2})$ 、 $\vec{BD} = (-2, 3, 0)$ , 法向量

$$\vec{n} = \vec{BP} \times \vec{BD} = (-3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -1).$$

于是

$$\sin \theta = \frac{|\vec{PC} \cdot \vec{n}|}{|\vec{PC}| |\vec{n}|} = \frac{|-3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2}|}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{18 + 8 + 1}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{42}}{21}.$$

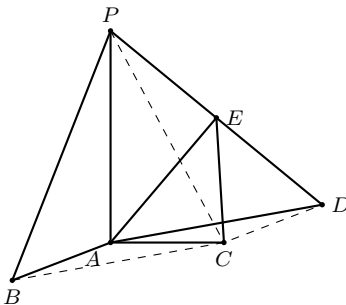
故  $PC$  与平面  $PBD$  所成角的正弦值为  $\frac{2\sqrt{42}}{21}$ 。

## 5.4 例 4: $PA \perp$ 底面矩形的线面平行、垂直与体积

例.

如图所示, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是矩形,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ , 且  $PA = AD = 4$ ,  $AB = 3$ , 点  $E$  为线段  $PD$  的中点。

1. 求证:  $PB \parallel$  平面  $AEC$ ;
2. 求证:  $AE \perp PC$ ;
3. 求三棱锥  $P-ACE$  的体积。



解.

(1) 设  $O = AC \cap BD$ 。矩形对角线互相平分,  $O$  为  $BD$  中点;  $E$  为  $PD$  中点, 故  $\triangle PBD$  中  $OE \parallel PB$ 。  $OE \subset$  平面  $AEC$ ,  $PB \not\subset$  平面  $AEC$ , 由线面平行判定定理,  $PB \parallel$  平面  $AEC$ 。

(2)  $PA \perp$  底面  $\Rightarrow PA \perp CD$ ; 矩形  $\Rightarrow AD \perp CD$ 。  $PA \cap AD = A$ , 故  $CD \perp$  平面  $PAD$ , 从而  $CD \perp AE$ 。又  $\triangle PAD$  中  $PA = AD = 4$ ,  $\angle PAD = 90^\circ$ ,  $E$  为斜边  $PD$  中点, 等腰三角形三线合一得  $AE \perp PD$ 。  $AE$  同时垂直  $CD$ 、 $PD$ ,  $CD \cap PD = D$ , 所以  $AE \perp$  平面  $PCD$ , 从而  $AE \perp PC$ 。

(3) 以  $A$  为原点,  $AB$ 、 $AD$ 、 $AP$  为  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴建系:

$$A = (0, 0, 0), C = (3, 4, 0), P = (0, 0, 4), E = (0, 2, 2).$$

三棱锥  $P-ACE$  的体积

$$V = \frac{1}{6} \left| \vec{PA} \cdot (\vec{PC} \times \vec{PE}) \right| = 4.$$

故  $V_{P-ACE} = 4$ 。

## 5.5 例 5: 三棱锥中的动点线面角

例.

如图, 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $AB = BC$ ,  $AP = PC$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $AP \perp PC$ , 直线  $BP$  与平面  $ABC$  成  $30^\circ$  角,  $D$  为  $AC$  的中点,  $\vec{PQ} = \lambda \vec{PC}$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ 。

1. 若  $PB > PC$ , 求证: 平面  $ABC \perp$  平面  $PAC$ ;
2. 若  $PB < PC$ , 求直线  $BQ$  与平面  $PAB$  所成角的正弦值的取值范围。

解.

设  $AC = 2$ 。由  $AB = BC$  且  $\angle ABC = 60^\circ$ , 故  $\triangle ABC$  为等边三角形,  $AB = BC = AC = 2$ ;  $D$  为  $AC$  中点,  $BD \perp AC$ ,  $BD = \sqrt{3}$ 。由  $AP = PC$ ,  $AP \perp PC$ , 故  $\triangle APC$  是等腰直角三角形,  $PD \perp AC$  且  $PD = \frac{1}{2}AC = 1$ 。所以  $BD$ 、 $PD$  都垂直于  $AC$ ,  $\angle BDP$  就是二面角  $B-AC-P$ 。

把  $D$  放在原点,  $AC$  沿  $x$  轴:  $A = (-1, 0, 0)$ ,  $C = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, \sqrt{3}, 0)$ 。设  $P = (0, \cos t, \sin t)$  ( $t = \angle BDP$ ,  $PD = 1$ )。由  $BP$  与底面成  $30^\circ$ ,  $\frac{|\sin t|}{|BP|} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ , 解得  $t = \frac{\pi}{6}$  或  $t = \frac{\pi}{2}$ 。两者分别给出

$$\begin{aligned} t = \frac{\pi}{2}: P &= (0, 0, 1), & PB &= 2 > PC = \sqrt{2}; \\ t = \frac{\pi}{6}: P &= \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), & PB &= 1 < PC = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

(1)  $PB > PC$  对应  $t = \frac{\pi}{2}$ , 此时  $P = (0, 0, 1)$  在  $D$  正上方, 即  $PD \perp$  平面  $ABC$ 。由面面垂直判定定理, 平面  $ABC \perp$  平面  $PAC$ 。

(2)  $PB < PC$  对应  $t = \frac{\pi}{6}$ ,  $P = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 。由  $\vec{BQ} = Q - B$ ,  $Q = P + \lambda(C - P)$ , 平面  $PAB$  的法向量取  $\vec{n} = \vec{PA} \times \vec{PB} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 。代入整理得

$$\sin^2 \theta = \frac{|\vec{BQ} \cdot \vec{n}|^2}{|\vec{BQ}|^2 |\vec{n}|^2} = \frac{12\lambda^2}{7(2\lambda^2 + \lambda + 1)}.$$

对  $\lambda$  求导, 分子为  $12\lambda(\lambda + 2) > 0$  ( $\lambda \in (0, 1)$ ), 故  $\sin^2 \theta$  在  $(0, 1)$  上严格递增。当  $\lambda \rightarrow 0^+$  时  $\sin \theta \rightarrow 0$ ; 当  $\lambda \rightarrow 1^-$  时  $\sin^2 \theta \rightarrow \frac{12}{7.4} = \frac{3}{7}$ , 即  $\sin \theta \rightarrow \frac{\sqrt{21}}{7}$ 。两端都取不到, 所以

$$\sin \theta \in \left(0, \frac{\sqrt{21}}{7}\right).$$

5.6 例 6: 矩形沿  $AE$  翻折

例.

如图 1, 在矩形  $ABCD$  中,  $AB = 3\sqrt{5}$ ,  $BC = 2\sqrt{5}$ , 点  $E$  在线段  $DC$  上, 且  $DE = \sqrt{5}$ , 现将  $\triangle AED$  沿  $AE$  折到  $\triangle AED'$  的位置, 连结  $CD'$ 、 $BD'$ , 如图 2。

1. 若点  $P$  在线段  $BC$  上, 且  $BP = \frac{\sqrt{5}}{2}$ , 证明:  $AE \perp D'P$ ;
2. 记平面  $AD'E$  与平面  $BCD'$  的交线为  $l$ 。若二面角  $B-AE-D'$  为  $\frac{2\pi}{3}$ , 求  $l$  与平面  $D'CE$  所成角的正弦值。

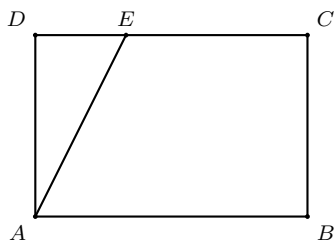


图 1

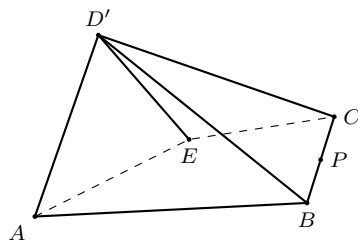


图 2

解.

在原矩形里,  $\triangle AED$  中  $AD = BC = 2\sqrt{5}$ 、 $DE = \sqrt{5}$ 、 $\angle ADE = 90^\circ$ , 故  $AE = 5$ 。设  $Q$  为  $D$  在  $AE$  上的垂足, 则  $DQ = \frac{AD \cdot DE}{AE} = 2$ ,  $AQ = \frac{AD^2}{AE} = 4$ ,  $QE = \frac{DE^2}{AE} = 1$ 。翻折时  $DQ \perp AE$  这条关系保持, 即折后  $D'Q \perp AE$ 。

(1) 在底面里验证  $QP \perp AE$ 。建底面坐标:  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (3\sqrt{5}, 0, 0)$ ,  $C = (3\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, 0)$ ,  $E = (\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, 0)$ , 则  $Q = \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{8\sqrt{5}}{5}, 0\right)$ 。  $P$  在  $BC$  上、 $BP = \frac{\sqrt{5}}{2}$ , 故  $P = \left(3\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ 。直接算  $\vec{QP} \cdot \vec{AE} = 0$ , 即  $QP \perp AE$ 。于是  $AE \perp D'Q$ 、 $AE \perp QP$ ,  $D'Q \cap QP = Q$ , 所以  $AE \perp$  平面  $D'QP$ , 从而  $AE \perp D'P$ 。

(2) 折后  $D'Q \perp AE$ 、 $QD \perp AE$  ( $D$  指底面内原  $D$  的位置), 所以  $\angle D'QD$  就是二面角  $B-AE-D'$ 。把折叠后的图建成空间坐标:  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $E$ 、 $Q$  同上 (都在  $z = 0$  底面),  $|QD'| = 2$  且  $D'Q \perp AE$ , 二面角为  $\frac{2\pi}{3}$ 。解得

$$D' = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{9\sqrt{5}}{5}, \sqrt{3}\right),$$

可验证  $AD' = 2\sqrt{5}$ 、 $D'E = \sqrt{5}$ , 与翻折前一致。

交线  $l$ : 平面  $AD'E$  的法向量  $\vec{n}_1 = \vec{AE} \times \vec{AD}' = (2\sqrt{15}, -\sqrt{15}, 5)$ , 平面  $BCD'$  的法向量  $\vec{n}_2 = \vec{BC} \times \vec{BD}' = (2\sqrt{15}, 0, 26)$ , 故  $l$  的方向

$$\vec{l} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \parallel (-13\sqrt{15}, -21\sqrt{15}, 15).$$

平面  $D'CE$  的法向量  $\vec{n}_3 = \vec{EC} \times \vec{ED}' \parallel (0, \sqrt{15}, 1)$ 。于是

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{l} \cdot \vec{n}_3|}{|\vec{l}| |\vec{n}_3|} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

故  $l$  与平面  $D'CE$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ 。

## 5.7 例 7: 大兴机场——多面体的离散曲率

例.

北京大兴国际机场的显著特点之一是各种弯曲空间的运用。刻画空间的弯曲性是几何研究的重要内容。用曲率刻画空间弯曲性, 规定: 多面体顶点的曲率等于  $2\pi$  与多面体在该点的面角之和的差 (多面体的面的内角叫做多面体的面角, 角度用弧度制), 多面体面上非顶点的曲率均为零, 多面体的总曲率等于该多面体各顶点的曲率之和。例如: 正四面体在每个顶点有 3 个面角, 每个面角是  $\frac{\pi}{3}$ , 所以正四面体在各顶点的曲率为  $2\pi - 3 \times \frac{\pi}{3} = \pi$ , 故其总曲率为  $4\pi$ 。

1. 求四棱锥的总曲率;
2. 若多面体满足: 顶点数 - 棱数 + 面数 = 2, 证明: 这类多面体的总曲率是常数。

解.

把定义写成式子: 顶点  $v$  处的曲率  $K(v) = 2\pi - \sum_{v \in f} \theta_{v,f}$ , 其中  $\theta_{v,f}$  是面  $f$  在  $v$  处的内角; 总曲率  $K = \sum_v K(v)$ 。注意把所有顶点的曲率加起来时,  $2\pi$  出现  $V$  次, 而所有面角恰好被全部算了一遍, 所以

$$K = 2\pi V - \sum_{\text{所有面角}} \theta = 2\pi V - \sum_f (\text{面 } f \text{ 的内角和}).$$

(1) 四棱锥有 5 个顶点 (1 个顶点、4 个底面顶点)、5 个面 (1 个四边形底面、4 个三角形侧面)。每个面的内角和: 四边形底面为  $2\pi$ , 每个三角形侧面为  $\pi$ 。所以

$$K = 2\pi \times 5 - (2\pi + 4 \times \pi) = 10\pi - 6\pi = 4\pi.$$

这一步对任意四棱锥都成立——和具体的形状、各个面角的大小无关。

(2) 设多面体的每个面  $f$  是  $n_f$  边形, 则它的内角和为  $(n_f - 2)\pi$ 。每条棱恰好被两个面共用, 所以所有面的边数之和  $\sum_f n_f = 2E$ 。于是

$$\sum_f (n_f - 2)\pi = \pi \sum_f n_f - 2\pi F = 2\pi E - 2\pi F.$$

代回总曲率:

$$K = 2\pi V - (2\pi E - 2\pi F) = 2\pi(V - E + F) = 2\pi \times 2 = 4\pi.$$

■ 所以凡满足  $V - E + F = 2$  的多面体，总曲率恒为  $4\pi$ ，是与形状无关的常数。