空间直角坐标系

Zircon

Contents

Chapter 1

平面向量基础知识复习

1.1　坐标与共线

点 $A(x,y)$ 对应位置向量 $\vec{OA}=(x,y)$。取一组基 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$（且 $\vec{e}_1\perp\vec{e}_2$），把 $\vec{OA}$ 沿基展开

$$\vec{OA}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2 \implies \vec{OA}=(x,y).$$

共线：$\vec{a},\vec{b}$ 共线，就是存在 λ 使

$$\vec{a}=\lambda\vec{b}\quad(\vec{b}\neq\vec{0}).$$

共线的推论：三点共线

设 A,B,C 三点共线，在外面任取一点 O 当参考点，则

$$\vec{OA}=\lambda\,\vec{OB}+\mu\,\vec{OC},\qquad \lambda+\mu=1.$$

1.2　平面向量基本定理

平面向量基本定理

$\vec{e}_1$ 与 $\vec{e}_2$ 不共线，则在 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 所在平面内的任意一个向量 $\vec{m}$，都可以表示为

$$\vec{m}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2.$$

特别地，当 $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=1$ 且 $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=0$ 时，就建立起平面直角坐标系 xOy，此时

$$\vec{m}=(x,y).$$

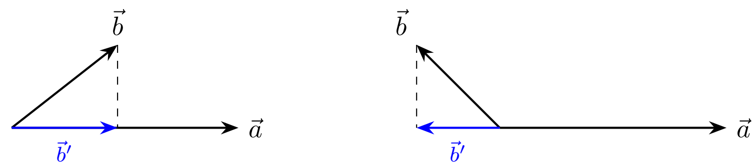
“不共线”是关键——共线的两个向量只能张成一条直线，张不出整个平面。

1.3 点乘

点乘的定义与本质

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle.$$

本质是"**投影** $\times$ **模长**"：$|\vec{a}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ 是 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影，再乘上 $|\vec{b}|$。



1.4 坐标形式：点乘、模长、夹角

设 $\vec{OA}=x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2$, $\vec{OB}=x_2\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2$, 其中 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 是单位正交基 $(\vec{e}_1^{\,2}=\vec{e}_2^{\,2}=1,\ \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=0)$。直接展开：

$$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=x_1x_2\,\vec{e}_1^{\,2}+(x_1y_2+x_2y_1)\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2+y_1y_2\,\vec{e}_2^{\,2}=x_1x_2+y_1y_2.$$

于是对 $\vec{a}=(x_1,y_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2)$：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2,\qquad |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2},\quad |\vec{b}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2},$$

$$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

1.5 平行与垂直

平行 $\equiv$ 共线

$\vec{a}=(x_1,y_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2)$ 平行（共线），从比例上看是

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}\quad\text{或}\quad\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2},$$

但分母可能为零、不够严谨。**标准写法**是：存在 λ 使

$$\begin{cases}x_1=\lambda x_2,\\ y_1=\lambda y_2.\end{cases}$$

垂直：$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2=0$。

1.6 升维：从平面到空间

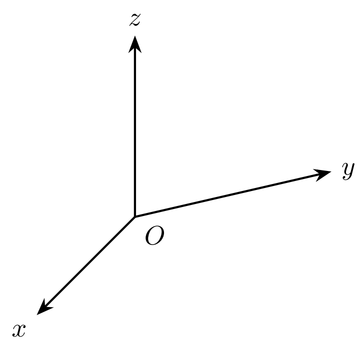
上面这套结论，到了空间里**只是多了一个坐标**：向量写成 $\vec{a} = (x, y, z)$，点乘多一项 z_1z_2，模长多一项 z^2，平行、垂直、夹角的形式完全不变。

Chapter 2

空间直角坐标系与空间向量

2.1 空间直角坐标系（右手系）

在空间取三条两两垂直、公共原点 O 的数轴 x, y, z，方向按**右手系**规定。空间中任一点都对应唯一一组坐标 (x, y, z)。



2.2 空间向量基本定理

空间向量基本定理

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 不共面，则空间中的任意一个向量 $\vec{a}$，都可以表示为

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

"不共面"是空间版本的关键条件——三条不共面的向量才撑得起整个空间；若三者共面，就只能张成一个平面。

推论：四点共面

设 A, B, C, D 四点共面，在外面任取一点 O 当参考点，则

$$\vec{OA} = m\,\vec{OB} + n\,\vec{OC} + p\,\vec{OD}, \qquad m + n + p = 1.$$

2.3 坐标、两点向量、单位向量

特别地，当 $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$ 且 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 两两互相垂直时，

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \implies \vec{a} = (x, y, z).$$

这时点乘、模长、夹角与平面情形完全同形，只是各多一项 z：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \qquad |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}.$$

两点向量：$A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$，则

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1).$$

方向单位向量的求法：把非零向量 $\vec{a}$ 除以自己的模长，

$$\vec{a}_0 = \pm\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

它表示 $\vec{a}$ 的方向、模长为 1；正负两支对应两个相反方向。

Chapter 3

平面的法向量

平面 α 的**法向量** $\vec{n}=(x,y,z)$ 是一条与 α 垂直的向量——它跟 α 内的每一条向量都垂直。坐标法解空间几何，第一步往往就是把法向量求出来。

3.1 原理：线面垂直的判定

要让 $\vec{n}$ 垂直于平面 α，只需让它垂直于 α 内**两条不共线**的向量即可（这正是线面垂直的判定）。设 α 内有

$$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\qquad \vec{b}=(x_2,y_2,z_2),$$

则 $\vec{n}=(x,y,z)$ 满足

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{a}=x_1x+y_1y+z_1z=0,\\ \vec{n}\cdot\vec{b}=x_2x+y_2y+z_2z=0.\end{cases}$$

两个方程、三个未知数，含一个自由量。**取一个分量为定值**（常令 $z=1$，或挑一个让其余坐标都是整数的值），代回解出另两个，就得到一个具体的法向量 $\vec{n}=(\ ,\ ,\ )$。

3.2 快速求法

解方程组每次都要现算，慢。更快的办法是**叉乘**：平面内两向量 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$、$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，它们的叉乘

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=(\,y_1z_2-y_2z_1,\ \ z_1x_2-z_2x_1,\ \ x_1y_2-x_2y_1\,)$$

天生同时垂直于 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，所以直接就是一个法向量。

记法是**错位相乘相减**：求某个分量时，把另外两列的坐标交叉相乘再相减（中间那个分量按 $z_1x_2-z_2x_1$ 的顺序写，相当于带一个负号）。

例.

> 平面内有 $\vec{a}=(1,0,1)$、$\vec{b}=(1,1,0)$，求一个法向量。

解.

> 直接叉乘：
>
> $$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = (\,0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ \ 1\cdot 1 - 0\cdot 1,\ \ 1\cdot 1 - 1\cdot 0\,) = (-1, 1, 1).$$
>
> 验证 $\vec{n}\cdot\vec{a} = -1+0+1 = 0$、$\vec{n}\cdot\vec{b} = -1+1+0 = 0$，与两向量都垂直，确是法向量。

Chapter 4

例题

4.1 菱形侧面 $\perp$ 底面

例.

如图,D 是 AC 的中点,四边形 $BDEF$ 是菱形,平面 $BDEF \perp$ 平面 ABC,$\angle FBD = 60°$,$AB \perp BC$,$AB = BC = \sqrt{2}$。

(1) 若点 M 是线段 BF 的中点,证明:$BF \perp$ 平面 AMC;

(2) 求平面 AEF 与平面 BCF 所成的锐二面角的余弦值。

4.2 侧面 $\perp$ 底面的三棱柱

例.

如图,已知三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$,侧面 $BCC_1B_1 \perp$ 底面 ABC。

(1) 若 M, N 分别是 AB, A_1C 的中点,求证:$MN \parallel$ 平面 BCC_1B_1;

(2) 若三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 的各棱长均为 2,侧棱 BB_1 与底面 ABC 所成的角为 $60°$,问在线段 A_1C_1 上是否存在一点 P,使得平面 $B_1CP \perp$ 平面 ACC_1A_1?若存在,求 C_1P 与 PA_1 的比值;若不存在,说明理由。

4.3 矩形折叠成直二面角

例.

如图,在矩形 $ABCD$ 中,$AB = 3$,$BC = 3\sqrt{3}$,点 E, H 分别是所在边靠近 B, D 的三等分点,O 是 EH 的中点。现沿着 EH 将矩形折成直二面角,分别连接 AD, AC, CB 形成如图所示的多面体。

(1) 证明:$EH \perp AC$;

(2) 求二面角 B-AC-O 的平面角的余弦值。

4.4 正三棱柱：题 20

例.

如图，三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的底面是正三角形，侧面 BB_1C_1C 是矩形，M, N 分别为 BC, B_1C_1 的中点，P 为 AM 上一点，过 B_1C_1 和 P 的平面交 AB 于 E、交 AC 于 F。

(1) 证明：$AA_1 \parallel MN$，且平面 $A_1AMN \perp$ 平面 EB_1C_1F；

(2) 设 O 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心，若 $AO \parallel$ 平面 EB_1C_1F 且 $AO = AB$，求直线 B_1E 与平面 A_1AMN 所成角的正弦值。

4.5 菱形底 + 竖立矩形

例.

如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 4，$\angle DAB = 60°$，矩形 $BDFE$ 的面积为 8，且平面 $BDFE \perp$ 平面 $ABCD$。

(1) 证明：$AC \perp BE$；

(2) 求二面角 $E\text{-}AF\text{-}D$ 的正弦值。

4.6 直三棱柱中的垂直与线面角

例.

如图，直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AC = BC$，$AA_1 = 2$，$AB = \sqrt{2}$，D 为 BB_1 的中点，E 为线段 AB_1 上一点。

(1) 若 $DE \perp CD$，求证：$DE \perp AB_1$；

(2) 若 $AE = 2EB_1$，异面直线 AB_1 与 CD 所成的角为 $30°$，求直线 DE 与平面 AA_1C_1C 所成角的正弦值。

4.7 矩形 $ABCD$ + 垂面 BEC

例.

如图，在几何体 $ABCDE$ 中，四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB \perp$ 平面 BEC，$BE \perp EC$，$AB = BE = EC = 2$，G 是线段 BE 的中点，点 F 在线段 CD 上且 $GF \parallel$ 平面 ADE。

(1) 求 CF 的长；

(2) 求平面 AEF 与平面 AFG 的夹角的余弦值。

4.8 四棱锥：等腰侧棱定垂面

例.

> （12 分）如图，四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为矩形，E 是边 AD 上的点，$PA = AB = AE = 2DE$，$\angle PBA = \angle PBC = 60°$。
>
> (1) 求证：平面 $PBE \perp$ 平面 $ABCD$；
>
> (2) 求直线 PC 和平面 PBD 所成角的正弦值。

4.9 四棱锥：直角梯形底

例.

> 如图所示，四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$PA \perp$ 平面 $ABCD$，$AD \parallel BC$，$AD \perp CD$，且 $AD = CD = 2\sqrt{2}$，$BC = 4\sqrt{2}$，$PA = 2$，点 M 在线段 PD 上。
>
> (1) 求证：$AB \perp PC$；
>
> (2) 若二面角 $M\text{-}AC\text{-}D$ 的大小为 $45°$，求 BM 与平面 PAC 所成的角的正弦值。

4.10 矩形沿 AE 折叠

例.

> 如图 1，矩形 $ABCD$ 中，$AB = 3\sqrt{5}$，$BC = 2\sqrt{5}$，点 E 在线段 DC 上且 $DE = \sqrt{5}$。现将 $\triangle AED$ 沿 AE 折到 $\triangle AED'$ 的位置，连接 CD', BD'（如图 2）。
>
> (1) 若点 P 在线段 BC 上，且 $BP = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$，证明：$AE \perp D'P$；
>
> (2) 记平面 $AD'E$ 与平面 BCD' 的交线为 l。若二面角 $B\text{-}AE\text{-}D'$ 为 $\dfrac{2\pi}{3}$，求 l 与平面 $D'CE$ 所成角的正弦值。