球（内切球与外接球）

Zircon

Contents

Chapter 1

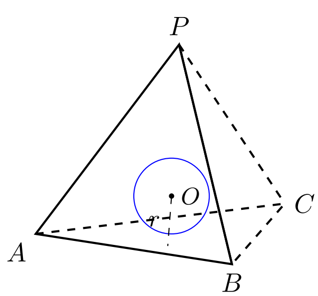
内切球

内切球是平面里**内切圆**的三维版本：球面内切于多面体的每一个面。它的刻画从内切圆平移而来——球心到每个面的距离都相等，这个公共距离就是半径。

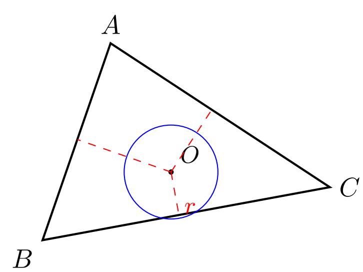
1.1 内切圆与内切球

两个平行的刻画

- **内切圆**：圆心到各边的距离都相等——关心的是**点线距**。
- **内切球**：球心到各面的距离都相等——关心的是**点面距**。



内切球：O 到各面距离 $= r$



内切圆：O 到各边距离 $= r$

两者都靠**垂直关系**——半径沿切点垂直于边（或面）。这个垂直关系在求面积或体积时很有用，关键的招法就是**分割**。

1.2 分割法

内切圆：由面积反推 r

把 $\triangle ABC$ 沿内心 O 切成三个小三角形 $\triangle OBC, \triangle OCA, \triangle OAB$，每个小三角形以一条边为底、高都是 r。记周长 $C = a + b + c$：

$$S = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br = \frac{1}{2}(a+b+c)r = \frac{1}{2}Cr.$$

内切球：由体积反推 r

把多面体沿球心 O 切成若干个" 以一个面为底、O 为顶" 的小棱锥，每个小棱锥的高都是 r。记表面积 $S_{表}$：

$$V = \sum \frac{1}{3}S_i\, r = \frac{1}{3}\Big(\sum S_i\Big)r = \frac{1}{3}S_{表}\, r.$$

把二维的 $S = \frac{1}{2}Cr$ 升一维，就是三维的 $V = \frac{1}{3}S_{表}r$。中学里最常用它来**求内切球半径** $r = \dfrac{3V}{S_{表}}$。

1.3 哪些立体有内切球?

注.

1. 所有**三棱锥**都有内切球。✓
2. 并非所有**四棱锥**都有内切球。×
3. 一般**棱柱**不一定有内切球（如底面 $ABCD$ 为矩形而非正方形的直棱柱）。×

1.4 例题

例.

已知四棱锥 P-$ABCD$，平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为矩形，$\triangle PAB$ 是边长为 2 的正三角形。若 P-$ABCD$ 存在内切球，则此内切球的半径为 ______，此四棱锥的体积为 ______。

Chapter 2

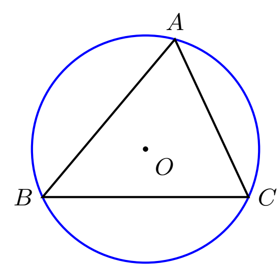
外接球：球心定位

外接球是**外接圆**的三维版本：球面过多面体的每一个顶点——球心到各顶点的距离都相等。

2.1 外接圆与外接球

两个平行的刻画

- **外接圆**：圆心到各顶点的距离都相等 $\Rightarrow$ 圆心是**各边中垂线的交点**。
- **外接球**：球心到各顶点的距离都相等 $\Rightarrow$ 球心是**各边中垂面的交点**。



2.2 球心与截面圆心的关系

取多面体的**某一个面**，这个面的顶点在该面内有自己的外接圆，圆心记作 O'。球心 O 与 O' 之间有如下关系。

球心 O 与某截面外接圆圆心 O'

设多面体某一个面在平面 α 内，该面顶点的外接圆圆心为 O'。则

(1) $OO' \perp \alpha$——**球心到截面圆心的连线垂直于该面**；

(2) 若该面恰好过球心，则 O 与 O' **重合**。

道理：O 到该面上各顶点距离都是 R，把 O 投影到 α 上得垂足 O'，则 O' 到这些顶点的距离也都相等（都等于 $\sqrt{R^2 - OO'^2}$），所以 O' 正是它们的外接圆圆心，且 $OO' \perp \alpha$。

由此求外接球：**先在一个面里定出外接圆圆心 O'，过 O' 作该面的垂线，球心 O 在这条垂线上**；再用"O 到各顶点等距" 列方程求出半径。

Chapter 3

正四面体与正三棱锥

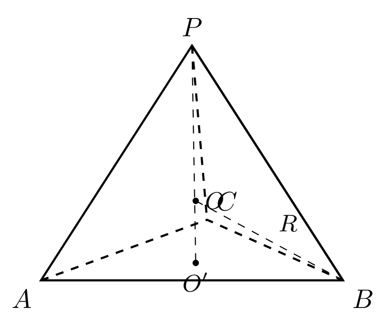
正四面体四个面都是全等的正三角形，是最对称的立体。它同时有外接球与内切球，且两球**同心**。下面用三种方法求半径，再推广到一般正三棱锥。

3.1 正四面体的外接球与内切球

设正四面体棱长为 a。底面是边长 a 的正三角形，其中心 O' 到顶点 B 的距离 $O'B = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$，顶点 P 到底面的高

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\tfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \tfrac{a^2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

由对称性，外接球球心、内切球球心都在 P 与底面中心 O' 的连线上，两球同心。



例（几何法）.

求正四面体外接球半径 R。

解.

球心 O 在 PO' 上。O 到顶点 P 距离 $= R$、O 到 O' 距离 $= h - R$，O 到底面顶点 B 距离也是 R，而 $O'B = \frac{a}{\sqrt{3}}$：

$$R^2 = (h-R)^2 + \left(\tfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = h^2 - 2hR + R^2 + \tfrac{a^2}{3}.$$

约去 R^2，代入 $h=\frac{\sqrt6}{3}a$（$h^2=\frac{2a^2}{3}$）：

$$2hR=h^2+\frac{a^2}{3}=\frac{2a^2}{3}+\frac{a^2}{3}=a^2 \implies R=\frac{a^2}{2h}=\frac{a^2}{2\cdot\frac{\sqrt6}{3}a}=\frac{\sqrt6}{4}a.$$

球心到底面的距离 $r=h-R=\dfrac{\sqrt6}{3}a-\dfrac{\sqrt6}{4}a=\dfrac{\sqrt6}{12}a$，由两球同心，这就是内切球半径。于是

$$R=\frac{\sqrt6}{4}a,\qquad r=\frac{\sqrt6}{12}a,\qquad R+r=h,\quad R=3r.$$

例（体积分割法）.

用 $V=\frac13 S_{表}r$ 求内切球半径。

解.

四个面都是边长 a 的正三角形，面积都记作 $S=\frac{\sqrt3}{4}a^2$。把正四面体沿内心切成四个小棱锥，各以一个面为底、高为 r：

$$V=\frac13 S\,r\times4=\frac43 S\,r.$$

另一方面，以底面为底、高为 h：$V=\dfrac13 Sh$。两式相等得 $h=4r$，即

$$r=\frac h4=\frac14\cdot\frac{\sqrt6}{3}a=\frac{\sqrt6}{12}a,\qquad R=3r=\frac{\sqrt6}{4}a.$$

与几何法一致。$h=4r$（等价 $R=3r$）是正四面体最好记的关系。

例（嵌入正方体）.

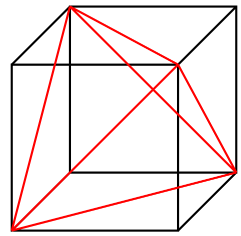
把正四面体嵌进正方体，用空间对角线求 R。

解.

取正方体的四个交错顶点，连成的就是一个正四面体，它的棱恰是正方体的**面对角线**。设正方体棱长 s，则正四面体棱长 $a=\sqrt2\,s$。正四面体与正方体**共外接球**，球心为正方体中心，直径即空间对角线 $\sqrt3\,s$：

$$2R=\sqrt3\,s=\sqrt3\cdot\frac{a}{\sqrt2}=\frac{\sqrt6}{2}a \implies R=\frac{\sqrt6}{4}a.$$

三种方法结果一致。



正方体里的正四面体：棱即面对角线

3.2 一般正三棱锥

正三棱锥的顶点 P 在底面正三角形中心 O' 正上方，但侧棱与底边不一定相等，所以高 h 是独立给的。球心仍在 PO' 这条轴上，几何法照搬：设底边长 a（底面外接圆半径 $\frac{a}{\sqrt{3}}$）、高 h，

$$R^2 = (h-R)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 \implies R = \frac{h^2 + \frac{a^2}{3}}{2h}.$$

轴上球心的垂线模型

只要顶点 P 在底面外接圆圆心 O' 正上方、距离为 h，底面外接圆半径为 r，则球心在 PO' 上，由 $R^2 = (h-R)^2 + r^2$ 得

$$R = \frac{h^2 + r^2}{2h}.$$

Chapter 4

补形法：补成长方体

把三棱锥补成长方体后，外接球就是长方体的外接球：球心在长方体中心，直径就是空间对角线，不必再单独找球心。

4.1 对棱相等的三棱锥

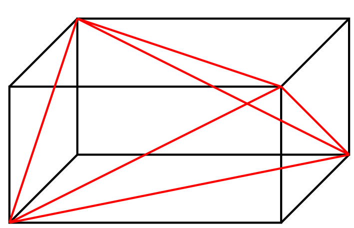
对棱相等 $\to$ 长方体

若三棱锥三组对棱两两相等，记 $AB = CD = a$、$BC = AD = c$、$AC = BD = b$，则可把它嵌进一个长方体，让**三棱锥的六条棱成为长方体的六条面对角线**。设长方体棱长 m, n, p：

$$\begin{cases} m^2 + p^2 = a^2 \\ n^2 + p^2 = c^2 \\ m^2 + n^2 = b^2 \end{cases} \implies 2(m^2 + n^2 + p^2) = a^2 + b^2 + c^2.$$

长方体空间对角线就是外接球直径，$m^2 + n^2 + p^2 = (2R)^2$，故

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}.$$



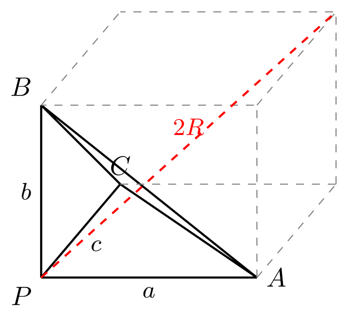
对棱相等的三棱锥：六条棱就是六条面对角线

4.2 墙角三棱锥

三棱两两垂直 → 长方体

墙角三棱锥：一个顶点处有三条棱 a, b, c 两两垂直，像墙角一样。把它补回长方体，这三条棱就是长方体过一个顶点的三条棱。空间对角线 $= 2R$：

$$a^2 + b^2 + c^2 = (2R)^2 \implies R^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}.$$



4.3 墙角模型的”复体”

以三条面对角线为棱 → 长方体

有时三棱锥的三条棱 m, n, p 不是长方体的棱，而是它三个面的**对角线**——把墙角模型”复制”一份拼成的样子。设长方体棱长 a, b, c：

$$\begin{cases} m^2 = a^2 + b^2 \\ n^2 = b^2 + c^2 \\ p^2 = a^2 + c^2 \end{cases} \implies m^2 + n^2 + p^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

又 $a^2 + b^2 + c^2 = (2R)^2$，故

$$R^2 = \frac{m^2 + n^2 + p^2}{8}.$$

与对棱相等公式同形（都除以 8），区别只在 m, n, p 是哪种棱：对棱相等时是三棱锥的实际棱长，这里是”面对角线型”的棱长。

Chapter 5

含垂直结构的四面体

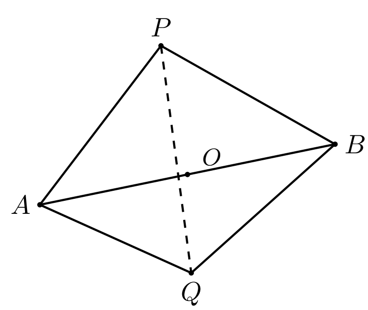
下面几类四面体的处理思想都是**先确定一个面内的外接圆圆心位置**，再过它作该面的垂线找球心。

5.1　两侧面是公共斜边的直角三角形

$\angle APB = \angle AQB = 90^\circ$（公共斜边 AB）

若四面体里有两个面都是**以 AB 为斜边的直角三角形**（P, Q 是另两个顶点），则直角 $\angle APB = 90^\circ$ 说明 P 在以 AB 为直径的球面上，直角 $\angle AQB = 90^\circ$ 说明 Q 也在上面。于是四个顶点都在这个球面上，AB **就是外接球的直径**：

$$R = \frac{AB}{2}.$$



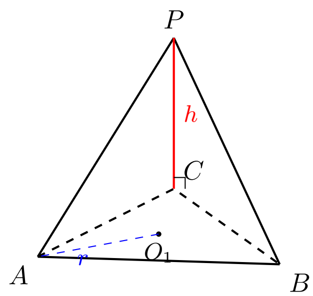
5.2　一条侧棱垂直于底面

$PC \perp$ 平面 ABC

若 $PC \perp$ 底面 $\triangle ABC$，则 PC 是**外接球的一条弦**。球心 O 落在两处的交线上：过 $\triangle ABC$ 外接圆圆心作底面的垂线，再过 PC 中点作 PC 的中垂面。设底面外接圆半

径 r、$PC=h$：

$$R^2=r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2.$$



5.3 两侧面互相垂直

平面 $PAC\perp$ 平面 BAC（公共边 $AC=l$）

两个面共边 AC、互相垂直。设它们的外接圆圆心为 O_1,O_2、半径 r_1,r_2，M 为 AC 中点。O_1,O_2 到 AC 的距离分别是 $\sqrt{r_1^2-(\frac{l}{2})^2}$、$\sqrt{r_2^2-(\frac{l}{2})^2}$；由两面垂直，这两段互相垂直。球心 O 在 O_1,O_2 上方，于是

$$R^2=\left[r_1^2-\left(\tfrac{l}{2}\right)^2\right]+\left[r_2^2-\left(\tfrac{l}{2}\right)^2\right]+\left(\tfrac{l}{2}\right)^2=r_1^2+r_2^2-\left(\tfrac{l}{2}\right)^2.$$

5.4 正三角形与直角三角形的组合（二面角）

有的题把一个正三角形和一个直角三角形**沿公共边折起**，给出一个二面角。处理的思想还是老一套：在两个面里各定出外接圆圆心 O_1,O_2，过它们作各自面的垂线，球心 O 在两条垂线的交点处；二面角决定了两条垂线的夹角，把 OO_1、OO_2 与两段到公共边的距离放进同一个空间直角三角形里解出 R。这类题没有现成公式，靠的是**把球心拆到两个面上去**这一招。

Chapter 6

练习题

6.1 填空题

例.

已知点 O 为圆锥 PO 底面的圆心，圆锥 PO 的轴截面为边长为 2 的等边三角形 PAB，求圆锥 PO 的外接球的表面积。

解.

轴截面是边长 2 的等边三角形，所以底面半径 $r=1$、高 $h=\sqrt{3}$。球心在轴 PO 上，套垂线模型 $R=\dfrac{h^2+r^2}{2h}$：

$$R=\frac{3+1}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}},\qquad R^2=\frac{4}{3}.$$

表面积 $=4\pi R^2=\dfrac{16\pi}{3}$。

例.

已知三棱锥 $S\text{-}ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上，$SA\perp$ 平面 ABC，$SA=2\sqrt{3}$，$AB=1$，$AC=2$，$\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$，求球 O 的表面积。

解.

SA 垂直底面，是侧棱垂直模型。先求底面外接圆半径：余弦定理

$$BC^2=1+4-2\cdot 1\cdot 2\cdot\cos\tfrac{\pi}{3}=3,\quad BC=\sqrt{3};$$

正弦定理 $\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}=2r$ 得 $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$。套公式

$$R^2=r^2+\left(\frac{SA}{2}\right)^2=1+3=4.$$

表面积 $= 4\pi R^2 = 16\pi$。

例.

已知点 A 是以 BC 为直径的圆 O 上异于 B, C 的动点，P 为平面 ABC 外一点，且平面 $PBC \perp$ 平面 ABC，$BC = 3$，$PB = 2\sqrt{2}$，$PC = \sqrt{5}$，求三棱锥 $P\text{-}ABC$ 外接球的表面积。

解.

两侧面 PBC、ABC 共边 BC 且互相垂直，$l = BC = 3$。

$\triangle ABC$ 的外接圆：A 在以 BC 为直径的圆上，所以这个圆就是它的外接圆，$r_1 = \dfrac{3}{2}$。

$\triangle PBC$ 的外接圆：

$$\cos\angle BPC = \frac{PB^2 + PC^2 - BC^2}{2 \cdot PB \cdot PC} = \frac{8+5-9}{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \sin\angle BPC = \frac{3}{\sqrt{10}};$$

$$r_2 = \frac{BC}{2\sin\angle BPC} = \frac{3}{2 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

套公式

$$R^2 = r_1^2 + r_2^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{10}{4} - \frac{9}{4} = \frac{5}{2}.$$

表面积 $= 4\pi R^2 = 10\pi$。

例.

棱长为 1、各面都为等边三角形的四面体内有一点 P，由点 P 向各面作垂线，垂线段的长度分别为 d_1, d_2, d_3, d_4，求 $d_1 + d_2 + d_3 + d_4$。

解.

正四面体各面面积相等，记为 S。以 P 为顶点、各面为底分割：

$$V = \frac{1}{3}Sd_1 + \frac{1}{3}Sd_2 + \frac{1}{3}Sd_3 + \frac{1}{3}Sd_4 = \frac{S}{3}(d_1 + d_2 + d_3 + d_4).$$

又以一个面为底、对顶点为顶：$V = \dfrac{1}{3}Sh$。两式相等得

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = h = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot 1 = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

（内部任一点到各面距离之和都等于这个高，与点 P 的位置无关。）

例.

正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AB=4$，$AA_1=6$，E,F 分别是棱 BB_1,CC_1 上的点，求三棱锥 $A\text{-}A_1EF$ 的体积。

解.

E,F 在与 AA_1 平行的两条侧棱上，沿棱滑动不改变体积。取 $A=(0,0,0)$，$B=(4,0,0)$，$C=(2,2\sqrt{3},0)$，$A_1=(0,0,6)$，$E=(4,0,t)$，$F=(2,2\sqrt{3},s)$：

$$V=\frac{1}{6}\left|\det[\vec{AA_1},\vec{AE},\vec{AF}]\right|=\frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix}0&0&6\\4&0&t\\2&2\sqrt{3}&s\end{pmatrix}\right|.$$

按第一行展开：$\det=6\cdot\det\begin{pmatrix}4&0\\2&2\sqrt{3}\end{pmatrix}=6\cdot 8\sqrt{3}=48\sqrt{3}$，与 t,s 无关。

$$V=\frac{48\sqrt{3}}{6}=8\sqrt{3}.$$

例.

底面边长为 $3,4,5$、高为 6 的直三棱柱形容器内放置一气球，使气球尽可能膨胀（保持球的形状），求气球表面积的最大值。

解.

$3,4,5$ 是直角三角形，其内切圆半径 $r_{底}=\dfrac{3+4-5}{2}=1$。球受两个限制：

$$\text{径向：}\quad R\le r_{底}=1;\qquad \text{轴向：}\quad 2R\le 6\ \Rightarrow\ R\le 3.$$

取更严的 $R=1$，表面积最大值 $=4\pi R^2=4\pi$。

6.2 选择题

例.

如图，圆形纸片的圆心为 O，半径为 $6\,\text{cm}$，该纸片上的正方形 $ABCD$ 的中心为 O，E,F,G,H 为圆 O 上的点，$\triangle ABE,\triangle BCF,\triangle CDG,\triangle ADH$ 分别是以 AB,BC,CD,DA 为底边的等腰三角形。沿虚线剪开后，分别以 AB,BC,CD,DA 为折痕折起 $\triangle ABE,\triangle BCF,\triangle CDG,\triangle ADH$，使 E,F,G,H 重合得到一个四棱锥。当该四棱锥的侧面积是底面积的 2 倍时，该四棱锥的外接球的表面积为（　）。

$$(A)\ \frac{16\pi}{3}\qquad (B)\ \frac{25\pi}{3}\qquad (C)\ \frac{64\pi}{3}\qquad (D)\ \frac{100\pi}{3}$$

解.

设正方形边长 a。正方形中心 O 到边 AB 的距离是 $\frac{a}{2}$，顶点 E 沿这条方向落在圆上，所以等腰三角形 ABE 的高（斜高）$= 6 - \frac{a}{2}$。

$$\text{底面积} = a^2, \qquad \text{侧面积} = 4 \cdot \frac{1}{2}\, a\left(6 - \frac{a}{2}\right) = 12a - a^2.$$

侧 $= 2\times$ 底：$12a - a^2 = 2a^2 \Rightarrow a = 4$。

折起后：底面正方形边长 4，半对角线 $2\sqrt{2}$；斜高 $= 6 - 2 = 4$，底面中心到边的距离 $= 2$，故顶点高

$$h = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}.$$

球心在轴上、距底面 k，由 $R^2 = (2\sqrt{3} - k)^2 = k^2 + (2\sqrt{2})^2$：

$$12 - 4\sqrt{3}\,k = 8 \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad R^2 = k^2 + 8 = \frac{1}{3} + 8 = \frac{25}{3}.$$

表面积 $= 4\pi R^2 = \frac{100\pi}{3}$，选 (D)。

例.

正方体的外接球与内切球上各有一个动点 M, N，若线段 MN 的最小值为 $\sqrt{3} - 1$，则 (　)。

(A) 正方体的外接球的表面积为12π　　(B) 正方体的内切球的体积为$\frac{\pi}{3}$

(C) 正方体的棱长为1　　(D) 线段MN 的最大值为$\sqrt{3}+1$

解.

设棱长 a。两球同心：内切球半径 $\frac{a}{2}$，外接球半径 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$。M, N 到公共球心的距离分别为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$、$\frac{a}{2}$，故

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}a \le |MN| \le \frac{\sqrt{3}+1}{2}a.$$

由 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}a = \sqrt{3} - 1$ 得 $a = 2$。逐项检验：

- (A) 外接球半径 $\sqrt{3}$，表面积 $4\pi \cdot 3 = 12\pi$。✓
- (B) 内切球半径 1，体积 $\frac{4\pi}{3} \neq \frac{\pi}{3}$。×
- (C) 棱长为 2。×
- (D) $|MN|$ 最大值 $= \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot 2 = \sqrt{3} + 1$。✓

选 (A)(D)。

例.

已知三棱锥 $S\text{-}ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上，$\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形，SC 为球 O 的直径，$SC=2$，则此棱锥的体积为（　）。

$$(A)\ \frac{\sqrt{2}}{6}\qquad (B)\ \frac{\sqrt{3}}{6}\qquad (C)\ \frac{\sqrt{2}}{3}\qquad (D)\ \frac{\sqrt{2}}{2}$$

解.

SC 是直径，$R=1$。球面上任一点对直径张直角，故 $\angle SAC=\angle SBC=90^\circ$，于是 $SA=\sqrt{SC^2-AC^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$。

求 S 到平面 ABC 的高。$\triangle ABC$ 外心 G 满足 $GA=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$；球心 O（即 SC 中点）到平面 ABC 的距离 $OG=\sqrt{R^2-GA^2}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$。由 O 是 SC 中点、C 在底面上，S 到底面的距离 $=2\,OG=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$。

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{18}}{18}=\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

选 (A)。

例.

一个斜三棱柱的底面是边长为 4 的正三角形，侧棱长 5，若其中一条侧棱与底面三角形的相邻两边都成 60° 角，则这个三棱柱的体积是（　）。

$$(A)\ \frac{50\sqrt{3}}{3}\qquad (B)\ 20\sqrt{3}\qquad (C)\ \frac{50\sqrt{2}}{3}\qquad (D)\ 20\sqrt{2}$$

解.

底面积 $=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 16=4\sqrt{3}$。

设底面正三角形在顶点 A 处的两边方向单位向量 $\vec{u}_1,\vec{u}_2$（$\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$），侧棱方向单位向量 $\vec{v}$ 与两者都成 60°：$\vec{v}\cdot\vec{u}_1=\vec{v}\cdot\vec{u}_2=\frac{1}{2}$。由对称性 $\vec{v}=p\,\dfrac{\vec{u}_1+\vec{u}_2}{|\vec{u}_1+\vec{u}_2|}+q\,\vec{n}$（$\vec{n}$ 为底面单位法向）。$|\vec{u}_1+\vec{u}_2|=\sqrt{3}$，由

$$\vec{v}\cdot\vec{u}_1=p\cdot\frac{1+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{p\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ p=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad q^2=1-p^2=\frac{2}{3},\ q=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

棱柱的高 $=$ 侧棱在法向的分量 $=5q=\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$。

$$V=4\sqrt{3}\cdot\frac{5\sqrt{6}}{3}=\frac{20\sqrt{18}}{3}=20\sqrt{2}.$$

选 (D)。